第3卷 第2期
1983年4月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.2
Apr. 1983

悖论与数学基础问题（Ⅱ）*

徐利治　朱梧槚 袁相碗 郑毓信

（吉林大学）　　（南京大学）

本文主要讨论恶性循环原则与类型混淆原则的划分．这是由于我们在一些场合发现有把两个原则混为一谈的情形而引起的．在这个讨论中，我们把“非直谓定义法”划分为广义、狭义和等价式三种情形．本来是没有这种划分的，现在这样做，首先是因为 Russell 的恶性循环原则指出：‘没有一个整体能包含一个只能借助于这个整体定义的元素’，既有‘只能’，当然应有‘并非只能’的情形。因此，‘只能’和‘并非只能’将是可以得到区分的．另外，‘总体G就是被定义的对象H’显然是‘只能借助总体G来定义H’的一个特殊情形，因此，‘只能’和‘等价式’也将是可以区分的．而对非直谓定义法作了如上的划分之后，将有助于我们对恶性循环原则与类型混淆原则的直观性了解，因之针对等价式非直谓的类型混淆原则与针对狭义非直谓的恶性循环原则之间的区别和联系也将一目了然．

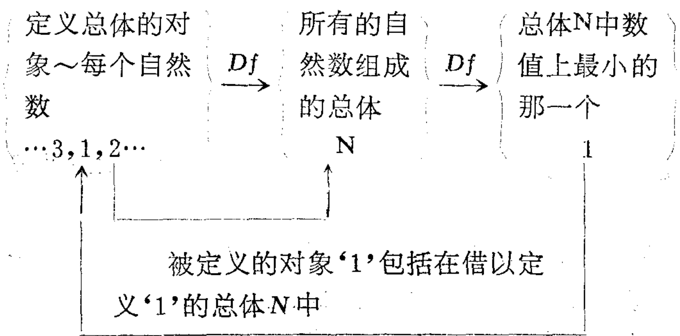
本文还对 Tarski 及其语义学、不完备性定理与悖论的分析、悖论的成因与研究悖论的意义等内容作了极为简短的讨论．

§1 论 RUSSELL 对悖论的解决方案

关于悖论的成因，Poincare 曾在 1905、1906、1908年多次指出，所有的悖论都与非直谓定义有关．什么叫非直谓定义？就是‘被定义的对象被包括在借以定义它的各个对象中’．说得更明确一点，就是‘借助于一个总体来定义一个概念，而这个概念本身又属于这一总体’．举例如下：

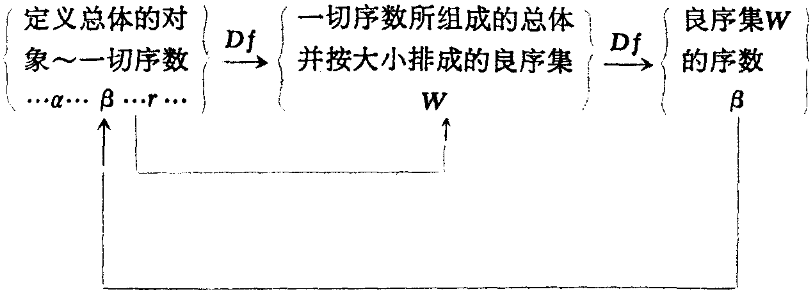
例1 自然数全体中最小的自然数 1．

这里被定义的对象是‘1’这个自然数，但当我们对‘1’下定义时，一方面要借助于‘最小’这个概念，特别是借助了‘全体自然数所组成的总体N’这一概念．但在定义总体N的时候，首先要借助每一个自然数，其中包括‘1’，这个自然数在内，这就是借助总借体N来定义‘1’而‘1’本身又属于总体N．



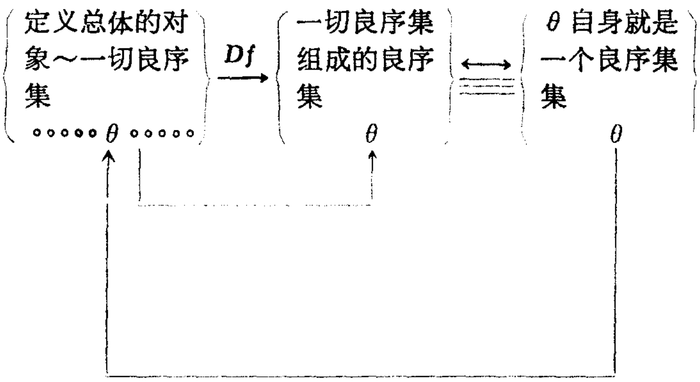
*1981年6月15日收到．

例2　一切序数所组成的良序集W的序数β。

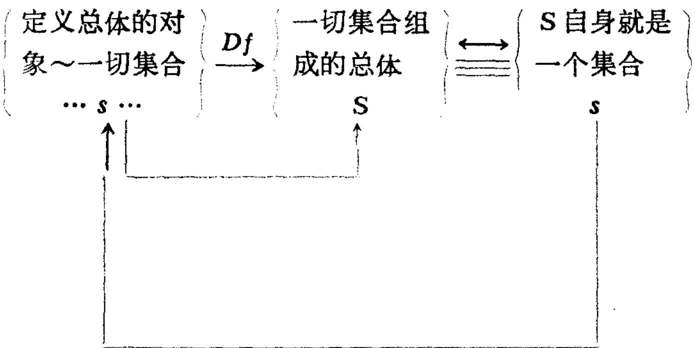


例3　一切良序集所组成的良序集θ．

每一良序集都对应于一个序数，故把一切良序集汇成总体后，再按每一良序集所对应的序数的大小为次序把这个总体排成良序集θ。



例4　一切集合所组成的集合。



以上四例都是非直谓定义法，但如何构成非直谓定义的具体过程却各有不同，可作如下分类：

I. 广义非直谓　凡是非直谓定义中的被定义对象，可用直谓定义法重新定义者，亦即被定义对象并非只能借助于包括它的总体来加以定义者叫做广义非直谓。如例1中的'1'，既可借助于N来定义，也可用'小于2的自然数'、'自然数3减去2'等等不借助于总体N来直谓地定义'1'。

Ⅱ. **狭义非直谓**　凡是非直谓定义中的被定义对象非借助于总体不可，亦即被定义的对象只能借助于这一总体才能定义。如例 2 中的序数 β，由于序数 β 就是良序集 W 的的序数 β。如果丢开总体W，如何来讲 W 的序数呢？亦即 β 是 W 的 β，不是别的 β，那么 β 就只能借助于 W 来定义它了。

Ⅲ. **等价式非直谓**　凡是非直谓定义中的被定义对象仅借助于'总体本身就是什么'这样的等价式刻划来确定的，则称为等价式的非直谓.如例 3 中的被定义对象就是通过'θ 本身就是一个良序集'这样的等价式刻划来确定的.例4中的被定义对象也是通过'一切集合的集合就是一个集合' 这样自身等于自己的方式来刻划。如果把这种等价式的刻划亦算作一种自相的定义方式的话，当应纳入非借助于总体来定义的情形中去。因此，等价式非直谓是狭义非直谓的特殊情形，而狭义非直谓又是广义非直谓的特殊情形。综上所述，可将非直谓的三种情形图示如下：

$$(\mathrm{I})\text{广义}\left\{\begin{array}{l}\text{定义总体的}\\ \text{对象}\\ \quad\cdots p\cdots\end{array}\right\}\xrightarrow{Df}\left\{\begin{array}{l}\text{一切 } p \text{ 组成的}\\ \text{总体}\\ \qquad P\end{array}\right\}\xrightarrow{Df}\left\{\ p\ \right\}$$

$$(\mathrm{II})\text{狭义}\left\{\begin{array}{l}\text{定义总体的}\\ \text{对象}\\ \quad\cdots p\cdots\end{array}\right\}\xrightarrow{Df}\left\{\begin{array}{l}\text{一切 } p \text{ 组成的}\\ \text{总体}\\ \qquad P\end{array}\right\}\xrightarrow[\ ]{\substack{\text{只能借助}\\ P\text{ 来}Df}}\left\{\ p\ \right\}$$

$$(\mathrm{III})\text{等价式}\left\{\begin{array}{l}\text{定义总体的}\\ \text{对象}\\ \quad\cdots p\cdots\end{array}\right\}\xrightarrow{Df}\left\{\begin{array}{l}\text{一切 } p \text{ 组成的}\\ \text{总体}\\ \qquad P\end{array}\right\}\xrightarrow[\substack{\text{总体 }P\text{ 就是}\\ p}]{\text{等价式刻划}}\left\{\ p\ \right\}$$

Russell 在解决悖论问题的征途上，立足于对悖论的更为一般的分析，鉴于这一分析，Russe ll进一步明确了 Poincare 关于悖论成因的想法，那就是所有这些悖论，都有这样一个关键性的对象，它借助于一个整体予以定义和刻划，但这一对象却又被包含在这一整体中，在这里出现了一种循环，而正是由于这种循环导致悖论的出现，因此，构成悖论的深刻原因确与非直谓定义法有关。为之，Russell 明确提出如下的：

恶性循环原则　没有一个整体能包含一个只能借助于这个整体来定义的元素[10]。

基于这一原则，Russell 形成和发展了他的分支类型论。

如果我们把恶性循环原则对照前面所讨论的关于非直谓定义法的三种情形加以分析，可看出此原则与狭义非直谓定义法直接相关，而作为狭义非直谓的一种特殊情况就是等价式非直谓定义法，从而由恶性循环原则对狭义非直谓定义法的否定也包括了对等价式非直谓定义法的否定。而等价式非直谓从集合的观点来讲，则与'一集为它自身之一元'直接相关。由此可见，Russell 的恶性循环原则从集合的观念出发，就直接隐含了下述一种思想规定，我们不仿称这种思想规定为：

类型混淆原则　任何一个集合决不是它自身的一个元素。

实际上，Russell 首先是对于性质，要按照它所属的对象的类型加以分类，属于O类的是那些论域中的对象的名称，如 a、b、c、…属于第 1 类的则是这些对象的性质，如 $f(a)$、

$g(b)$、…中的 f、g、…属于第2类的则是那些性质的性质，如 $F(f)$、$G(f)$、…中的 F、G、…，属于第三类的则是性质的性质的性质等等。

作为类的划分的一个基本原则是，每一谓词（性质）都必须从属于一个确定的类，而且每一类的性质只有当其使用于直次于它的那个类的对象才是有意义的，因此，如 $f(a)$、$F(g)$、…是有意义的，但 $F(a)$、$f(f)$、$a(b)$…就是无意义的。

现在，我们按照 Russell 上述对于类的划分及其必须遵循的原则，对于由 a、b、c、…为元素而构成的集合 S 加以分析，为使讨论简单明瞭，不仿把元素 a、b、c、…视为论域中对象的名称，即属于第 O 类的，而构成集合 S 之后，对于元素 a、b、c、…所具有的性质 $a\varepsilon S$、$b\varepsilon S$ $c\varepsilon S$、…等视为对象 a、b、c、…的性质而属于第1类的，那么，按照上述'每一类的性质只有当其使用于直次于它的那个类的对象才有意义的规定，可知只有 $a\varepsilon S$、$b\varepsilon S$、…才是有意义的（相当于上述 $f(a)$…），但是，$S\varepsilon S$、$b\varepsilon c$、$c\varepsilon c$、…等等都是没有意义的（相当于上述 $f(f)$、$b(c)$、$c(c)$、…一类情形），也是所给原则之下所不允许的。因此，集合 S 就决不会是 S 自身的一个元素，否则，若设 $S\equiv C$，则就将出现 $S\varepsilon S$、$C\varepsilon C$、一类违反原则而无意义的事了，可见完全符合上述类型混淆原则这样的思想规定。

Russell 认为，除掉对于性质要作出类的划分之外，还要对于性质的定义方法，再把同一类中的性质作出级的划分，那些在定义方法中没有涉及到'所有的性质'的性质是第1级的，而那些在下定义时涉及到第 n 级的'所有的性质'的性质是第 $n+1$ 级的，如此，当不具体指明所考虑的级，则凡涉及到'所有的性质'的表达式是无意义的。

这样，所有的性质（谓词）首先按对象的性质、性质的性质、……加以分类，再按类中性质的定义方法加以分级。因之，每一性质都归属于一定的类和级，由于级是在类内划分的，因此，Russell 的这一理论就叫做分支类型论。

在这里，首先要注意级的划分是针对定义方法而说的，而类的划分则不是，所以两个划分在含义上完全不同。如例2中所见，不妨把所有的序数算作是第Ⅰ级的性质，则一切序数所组成的良序集 W 的序数 β 这个性质就是第2级的了，而且 β 这个第2级的性质是一个只能借助第1级的'所有的性质'来定义的性质，故由恶性循环原则，β 一定不能被包括在 W 之中。

现在，让我们再回到前述三种类型的非直谓定义方法中去讨论 Russell 的恶性循环原则与类型混淆原则。首先，广义非直谓定义法不牵涉到这两个原则中的任何一个，但是，狭义非直谓定义法却与恶性循环原则直接冲突，由于等价式非直谓是狭义非直谓的特殊情形，因此，当承认恶性循环原则而否定狭义非直谓定义法时，等价式非直谓定义法就自然不允许使用了，另一方面，构成等价式非直谓定义法的关键一步就是由整体到被定义对象的等价式刻划，而等价式刻划却冲突且仅冲突于类型混淆原则，这样一来，如果只承认类型混淆原则而不承认恶性循环原则的话，则在狭义非直谓定义法中就只排除等价式非直谓的特殊情形，尚可保留那些不涉及类型混淆和等价式刻划的一般意义下的狭义非直谓定义法。

实际上，那些不涉及类型混淆的非直谓定义法不仅在数学上，而且在日常生活中也常常是不可缺少的。从数学上看 Weyl 曾指出，把上确界定义为上界中最小的一个，这就是

只能借助于‘上界的总体’来定义上确界的非直谓定义法，但此处虽然包含了循环，却是无害的，它不仅没有引向悖论，而上确界的概念在数学中是十分有用的.所以在数学领域中，如果坚持贯彻恶性循环原则，势必要将许多数学概念抛弃，许多数学定理不能证明，从而虽然排除了悖论，却同时失去了许多合理的东西，再加上 Russell 的分支类型论的展开显得非常累赘、烦琐和复杂，以致不为数学家所接受。

后来，有 Russell 的学生 Ramsey 把分支类型论加以简化，在 Ramsey 看来，悖论可分为两类：一类叫做逻辑、数学悖论，它只是由逻辑或数学系统中的概念构成，因之总能用逻辑和数学符号来表达。例如，前述 *Cantor* 悖论，Russell 悖论、Bulari-Forti 悖论等均属这一类。另一类可叫做语义学悖论，这类悖论由命名、真、假等概念构成，因之，如表明、刻划、真等语义项成为它不可少的组成部分。例如，前述‘永恒的撒谎者悖论’、‘理发师悖论’和‘Grelling 悖论’等等皆属这一类。综观前述逻辑、数学悖论，无不导源于‘一切集的集是集’、‘一切良序集的集是良序集’等等违反类型混淆原则的‘本身分子集’。后经 Ramsey 的研究，只要坚持类型混淆原则，便足以排除逻辑、数学悖论，而对于那些语义学悖论，则由于它不能在逻辑、数学的符号语言中表达，从而由逻辑出发去构造数学时，可以不考虑语义学悖论。因之，Ramsey 就在废除分支类型论中关于级的划分而保留类的划分的基础上建立了简单类型论，并为大多数数学家所欢迎。

对于非直谓定义法，Ramsey 指出，这里的确包含了循环，但这一循环是无害的，不是恶性的，此处作为这一断言的认识论基础是这样的：性质的整体本身已经存在着，而作为非直谓定义，只是一种加以鉴别的方法，如同‘房间里最高的人’一样，这是一个经验的事实，就是作为有限的存在不可能单独地对无穷多个性质中的每一个去进行命名，却可以通过所有性质的整体而对其中一些进行描述[12]。所以，Ramsey 在数学的领域里仍然保留了狭义非直谓定义法的合理使用而又废除了逻辑、数学悖论的出现。如此，Russell 的分支类型论就显得多余了。

§2　论 TARSKI 及其语义学

Tarski 曾对语义学悖论作了比较彻底的研究。他指出：语义学悖论的成因，特别是导致诸如‘强化了的撒谎者悖论’出现的原因在于自然语言的含糊性。‘自然语言的一个特徵在于它的普遍性，正是这种普遍性构成了所有语义学悖论，诸如永恒性撒谎者悖论等出现的主要原因’。[13]严格地说，Tarski在这里所说的‘普遍性’实际上就是指的‘语义学上的封闭性，’所谓‘语义学上的封闭性’就是指一种语言包含了自己的语义学概念，而 Tarski 证明了：如果一种语言在语义学上是封闭的，而且在其中普遍的逻辑法则也是适用的话，那它就一定包含有永恒性撒谎者悖论[18]。因为一种语言包含了它自身的语义学概念，而在其中普遍的逻辑法则又同时适用的话，这就必然是不相容的.’[13] Russell 为要解决语义学悖论，也曾建议把他的类型论扩大为分层语言论，Tarski 顺着 Russell 的思路发展和形成了理论语义学，展开了关于‘对象语言’和‘元语言’的讨论。Tarski在他的语义学理论中指出，在一个语言系统的内部是不能定义关于这一语言的语义学概念的，对象语言的语义学概念必须在对象语言以外的元语言中予以表述（例如，如果‘天在下雨’这一命题是属于对象语言的，则命题'‘天在下雨’这一命题是真的'就属于元语言，而不再属于对象语了.），

而元语言的语义学概念又必须在元语言以外的元元语言中予以表述。Tarski证明了，在一定的范围之内（如果元语言中的变量比对象语言中的变量具有更高的逻辑类型）可以借助于递归的方法在元语言中给出关于对象语言的语义学概念的充分而又正确的定义，这里所谓的‘充分’是指这一定义符合语义学概念的真实意义；而所谓的‘正确’是指可以证明这一定义不会导致悖论[22]。由此，在这一范围内，也就可以用语句的结构分析来代替语义学的考虑，即可以把‘语义学’化归为‘语形学’。但是，Tarski又证明了，如果超出上述范围，即如果对象语言与相应的元语言中变量具有相同的逻辑类型，那么，要给出上述意义下的充分而又正确的定义就是不可能的，从而‘语义学’也就不可能完全化归为‘语形学’。总之，按照前述对象语、元语言、元元语言、……这样语言分层的原则来确立语义学概念当可同时避免语义学悖论的出现。但在这里还有一个前提，那就是‘只有在元语言中具备比对象语言中所有的变量都具有更高逻辑类型的变量时，才能在元语言中构造出在方法论上正确并在实质上是充分的语义学概念的定义.’[13] 相反地，如果对象语也只足够丰富，以致‘元语言中所有的概念和语法形式都能在对象语言中得到翻译.’[13]那么，上述一套方法将是无济于事，即语义学悖论在定义语义学概念时仍将不可避免。但是Tarski又指出：‘即使对无穷阶的语言来说，真理概念的无矛盾性和正确的应用仍然是可能的，只要把真理概念作为元语言的原始概念之一，并通过公理来确定它的性质.’[13]

事实上，‘只有当Tarski证明了人们可能把真理这个概念引入演绎理论中而不会陷入矛盾时，严格意义的语义学才开始它真正的发展’[14]。在Tarski之后，西方逻辑学界和数学界至今在悖论问题上进行着热烈的讨论。但是，悖论‘这个问题，哲学家们和数学家们热烈讨论了好几十年，却至今没有得出园满的答案’[8]。

最后，不妨让我们看一看Tarski是怎样对‘永恒性撒谎者悖论’这一语义学悖论给出严格表述形式的；

首先，按照‘命题为真’的含义，有这样的原则：

（1）X是真的，当且仅当，P。

这里P是任意的一个命题，而X则是这一命题的名称。

现考虑这样的命题：

C不是真的。

现用C表示一种印刷上的缩写，并用它来代表写在本页上一行的那个命题。

因此，根据上述C的意义，自然有

（2）‘C不是真的’等同于C。

又根据（1）必有：

（3）‘C不是真的’是真的，当且仅当，C不是真的。

这样，由（2）和（3）就有：

（4）C是真的，当且仅当，C不是真的。

显然，(4)是矛盾的[22]。

综观前此所述，Tarski提出独立地发展语义学的方法，即认为可以把语义学的概念看成是原始概念，并通过公理来对它们的性质加以刻划。

§3 论GÖDEL不完备性定理与悖论

如所知，著名的Gödel不完备性定理是数理逻辑发展史上的重大研究成果，曾被誉为'逻辑在现代所取得的最重要的进展之一.' 和'数学与逻辑发展史中的一个里程碑'[15]. 但是，用Gödel自己的话来讲，他获得并证明这个定理是直接来自对Russell悖论的分析，这就是说，不完备性定理的直观背景及其证明思想与悖论的分析有着密切的联系。可见，从方法论的角度来研究悖论问题，该有多么重要的意义。

Gödel关于形式系统的不完备性定理首次发表在他的《论'数学原理'及有关系统中的不可判定命题》一文中，但这是关于不可判定命题存在性的一般结果，如果仅就算术系统而言（并经Rosser改进后），不完备性定理可以简单地表述为下述定理。

定理　如果一个含有自然数论的形式系统S是无矛盾的，则其S中存在一个逻辑公式A，使得在S中，A是不能证明的，同时$\neg A$也是不能证明的。

作为不完备性定理证明思想的一个关键之处在于映射思想的天才应用.'Gödel通过一种十分新颖的映射形式来建立他的主要结论.'[15] 实际上，所说'映射'的基本思想就是借助一一对应，使得某一领域内的对象之间的某种关系得以在另一领域内的对象之间的关系得到表现，这是数学领域内的一种极为重要的研究方法。Gödel就用这种方法把算术系统（记为N）中的符号、表达式和表达式的序列都映射为数——他通过引进Gödel数而实现了对象的数化手续。这样一来，对于数理逻辑及其他有关分支来说，在研究方法上就提供了一种数字化的工具。从而方便地把一些讨论对象（如符号、公式）转换为自然数或自然数的函数。致使我们能用自然函数的理论来讨论有关问题。其次，Gödel又通过递归函数的引进证明了所有元理论中关于表达式的结构性质的命题，均可在算术系统中得到表示。如此，就使元理论中的命题都映射为算术系统中的命题，致使算术系统中的一部分表达式获得了元数学意义。

Gödel自己在阐明其证明思想时指出：'我们可以注意到一个形式系统的公式都表现为基本符号（变量、逻辑常项、括号或中断符号）的一个有限序列，而且人们容易精确地去指明基本符号的那些有限序列是有意义的公式和那些不是有意义的公式，类似地，从形式的观点看，所谓证明，实际上就是公式的一个有限序列，对于元数学来说，究竟用什么东西来作为基本符号当然是没有关系的，我们不妨就用自然数来作为基本符号，如此，一个公式就是一个自然数的有限序列，而一个证明便是一个'有限的自然数序列'的有限序列，据此，元数学的概念（命题）也就变成了关于自然数或它们的序列的基本概念（命题），从而即可（至少是部份地）在（对象）系统本身的符号中得到表示，特别是人们可以证明'公式'、'证明'、'可证公式'等都可在对象系统中加以定义.'[16]

如此，作为不完备性定理证明的第二步是在对象系统内构造这样一个命题G，使其元数学意义为'G是不能证明的.'（注意，这是元数学中的命题——把它记为G'）。

作为定理证明思想的直观背景来说，一旦构成了这样的命题，定理的证明就完成了。因为G正是所需要的不可判定的命题，现简要地作一描述如下：

前提。(α) A是可证明的命题必然是真的.（从直观上看，这是任一公理系统的必然要求.）

(β)命题的真理性在映射下保持不变.(特别是这里的G和G'是同真假的.)

结论一、G是不能证明的。

证明。现用反证法，设G是可以证明的$\xrightarrow{(\alpha)}$ G为真$\xrightarrow{(\beta)}$ G'为真$\xrightarrow{\text{由}G'\text{的意义}}$ G是不能证明的，矛盾。证毕。

结论二、$\neg G$也是不能证明的

证明。由结论一可知，G是不能证明的$\xrightarrow{\text{由}G'\text{的意义}}$ G'为真$\xrightarrow{(\beta)}$ G为真$\xrightarrow{Df}$ $\neg G$为假$\xrightarrow{(\alpha)}$ $\neg G$是不能证明的。证毕.

由结论一和结论二可知G是不可判定的，亦即系统是不完备的。

Gödel自己指出：'这一推理过程与Richard悖论的相似之处是显然的，而且和强化了的撒谎者悖论也存在有一个很大的相似性.'[16]

此外，大家知道Tarski证明了下述

定理 对于无穷阶的形式语言来说，如果相应的元理论中的可证明命题集是无矛盾的，那么，就不可能在元语言中构造出一个在约定意义下是充分的关于真理的定义[13].

这是一个关于真理概念的可定义性的定理，值得注意的是Tarski对本定理的证明思想与方法完全类似于上述Gödel对不完备性定理的证明思想和方法。

Gödel的定理和Tarski的定理都具有深刻的数学和哲学意义，而且它们的证明思想都是直接源渊于悖论的分析。可见从方法论的角度来看悖论问题的研究确有重要意义。

§4 关于悖论的成因与研究悖论的意义

我们在§1中论及悖论的定义时曾指出，任何一个悖论都相对于某一理论体系，不妨进一步指出，任一悖论还属于一定的历史范畴，亦即它还相对于认识的各个历史阶段，如希帕索斯悖论、Galileo悖论和Berksley悖论等等均已进入历史博物馆。既然任何悖论都属于一定的历史范畴和一定的理论系统，也就不存在任何绝对意义下的悖论。既然如此，也没有什么绝对意义下的产生悖论的终极原因，同时也不会有一个能在绝对意义下一劳永逸地免除悖论的方法，即不存在一个历史地与将来地相对于任何系统的免除悖论的方法，但这又并不排斥我们能在认识论的意义下去揭示产生悖论的根本原因，如所知，人的认识总具有历史的局限性和相对性，因此，从认识论的角度来看产生悖论的根本原因，无非是人的认识与客观实际以及认识客观世界的方法与客观规律的矛盾，这种直接和间接的矛盾在某一点上的集中表现就是悖论。例如，Galileo悖论和希帕索斯悖论就表现为直接的主观认识与客观实际的矛盾.又如Cantor用于造集的概括原则是认识世界的方法或手段，但是生成集合有它自身的客观法则，当前，一般认为产生Russell悖论的原因乃在于概括原则造集的任意性与生成集合的客观规则的非任意性之间的矛盾。当然，作为认识世界时的造集方法的概括原则与生成集合的客观规律之间有无更本质的脱节，目前还不能定论，但是，这归根到底表现为认识世界的方法与客观规律之间的矛盾，这是一种间接的主观矛盾。但是，无论是直接的或间接的矛盾，从认识论的角度来说，归根结底是在一定历史阶段中人的主观认识与客观实际之间的矛盾。而悖论就是这种矛盾在某些点上的集中表现。

如此，由于人的认识在各个历史阶段中的局限性和相对性，在人类认识的各个历史阶

段所形成的各个理论体系中，本来就具有产生悖论的可能性，但在人类认识世界的深化过程中同样具备排除悖论的可能性和现实性．人类认识世界的深化没有终结，悖论的产生和排除也没有终结．因之，在绝对意义下去寻找什么产生悖论的终极原因和创造什么解决悖论的终极方法都是不符合实际的．

悖论问题的研究，对于数学基础理论、逻辑学、语言学和哲学的研究都是有意义的．试看语义学、类型论、多值逻辑．公理化集合论的几个重要系统，直到近代数学的三大流派的形成和发展，均与悖论问题的研究有关，还有公理化方法论、数理逻辑、证明论和模型论的形成和发展的原因除了非欧几何的产生之外，也与悖论问题的研究相关．又如前述Gödel不完备性定理这样重大的研究的成果，其直观背景和证明思想也直接来自悖论的分析．所以，贝特说：‘现代逻辑中的许多最为深刻的成果，都从悖论的分析中产生．’[17]Fraenkel说：‘作为近基础理论研究的最有兴趣的发展之一，就是证明了这样一点，语义学悖论所代表的问题不仅是那种与数学本身只有间接关系的方法论问题，而且也是对于数学有着巨大直接作用的研究的出发点．’[4]Tarski 说：‘必须强调的是，悖论在建立现代演绎科学的基础中占有一个特别重要的地位，正象集合论的悖论，特别是 Russell 悖论成为逻辑和数学相容性形式化的起点一样，撒谎者悖论及其他语义学悖论导致了理论语义学的发展．’[18]总而言之，在二十世纪的今天来讨论和研究悖论问题，首先应该把十八世纪以前那种认为悖论只是茶余酒后的闲谈的陈旧看法扫除，否则只能说明对数学基础、数理哲学的近代发展视而不见．当然，话又要说回来，如果把悖论问题的研究的意义或重要性过份地夸张，甚至强调到一个不适当的程度，则既无这个必要也不符合实际．

参　考　文　献

[1] 莫里斯·克莱因，数学的基础(上)，自然杂志，1979，第 4 期(原载法文期刊 La Recherche, 1975 年 3 月号，陈以鸿译，莫绍揆校．)

[2] 张锦文，集合论与连续统假设浅说，上海教育出版社，1980年．

[3] 黄耀枢，论逻辑在数学发展中的作用，哲学研究，1979，第 7 期．

[4] Fraenkel A. A. & Bar-Hillel, Y. Foundations of Set Theory, Amsterdam: North-Holland, 1958.

[5] 莫里斯·克莱因，古今数学思想，上海科学技术出版社，1979．

[6] 莫绍揆，数学三次危机与数理逻辑，自然杂志，1980，第 6 期．

[7] 那汤松，N. П. 实变函数论(下)，高等教育出版社，1956．

[8] 杨熙龄，悖论研究八十年，国外社会科学，1980，第 7 期．

[9] Luchins, A. & Luchins. E., 'Logical Foundation of mathematics for Behavioral Scientists.', New York Holt Rine Hart and Vinsston Jnc (1965).

[10] Gödel, K. 'Russell's Mathematical Logic', in the philosophy of Bertrand Russell, ed. by P. A. Schilpp. New York: Tudor, 1944-Reprinted in this anthology, pp. 211-32.

[11] Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, London: G. Allen, 1919, Excerpts reprinted in this anthology, pp. 113—33.

[12] Carnap, R., 1930, Die Mathematik als Zweig der Logik, Blätter für deutsche philosophie 4.

[13] Tarski, A. 《Logic, Semantics, Matamathematics》, trans. by J. H. Woodger. Oxford: Clarendon Press, 1956, including "The Concept of Truth in Formalized Languages" "On the Concept of Logical Consequence", ete.

[14] 沙夫著·周易、罗兰译，语义学引论，1979年.

[15] Nagel, E. and Newman. J. R. Gödel's proof, New York: New york Univ.

[16] Gödel, k. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Sy-stems, trans. by B. meltzer, with an introduction by R. B. Braithwaite. Edinburgh: Oliver and Boyd. 1962.

[17] 杨熙龄，哥德尔对哲学的贡献，国外社会科学，1979，第5期.

[18] Tarski, A. "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics" in Readings in philosophical Analysis, ed. by H. Feigl and W. Sellars. Now york: Appleten 1949.

[19] 《逻辑学辞典》试写辞条选登，社会科学战线，1980，第二期.

[20] Shaw-Kwei, Moh., Logical paradoxes for many-valued systems. *J. S. L.*, 1954, 19, 37—40.

[21] Herbert B. Enderton, Elements of Set Theory, 1977.

[22] Tarski, A. The Semantic Concept of Truth in Formalized Language, 1931, Reprinted in (1948) p. 152—278.

Antinomies and the Foundational Problem of Mathematics(Ⅲ)

Hsu L. C.(徐利治) *Chu* W. J.(朱梧槚)

Yuan S. W.(袁相碗) *Tseng* Y. S.(郑毓信)

Abstract

A basic principle closely related to Russell's "vicious circle principle" is the statement that "any set (aggregate) cannot be an element of itself". The principal object of this article is to draw a clear distinction between the two principles just mentioned by classifying the forms of impredicative definition into three different kinds. Detailed exposition has been given in §1. Other parts of the article are devoted to analysis & discussion of Tarski's semantics and Gödel's incompleteness theorem in relation to some antinomies. Finally the source problem concerning various antinomies has been briefly discussed.