第3卷 第2期
1983年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 3 No. 2
Apr. 1983

具有给定极点的有理函数的逼近与展开(二)*

沈燮昌

(北京大学)

§4 有理函数的级数展开问题

代替实轴上的三角函数系，即单位圆周 $|z|=1$ 上的函数系 $\left\{z^n、\frac{1}{z^m}\right\}$，$n=0,1,\cdots$，$m=1,2,\cdots$，考虑具有极点在 $\{\alpha_k\}$，$|\alpha_k|<1$，及 $\{\beta_k\}$，$|\beta_k|>1$，的有理函数正交系：

$$\varphi_0(z)=\sqrt{\frac{1-|\alpha_0|^2}{2\pi}}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z},$$

$$\psi_1(z)=\sqrt{\frac{|\beta_1|^2-1}{2\pi}}\frac{1}{1-\bar{\beta}_1 z},$$

$$\psi_m(z)=\sqrt{\frac{|\beta_m|^2-1}{2\pi}}\frac{1}{1-\bar{\beta}_m z}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{z-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k z}$$

$$n、m=1,2,\cdots, \tag{4.1}$$

它们在 $|z|=1$ 上构成规格化正交系，即令

$$\Phi_n(z)=\begin{cases}\varphi_n(z) & n\geqslant 0\\ \psi_{-n}(z) & n<0,\end{cases} \tag{4.2}$$

则成立

$$\int_{|z|=1}\Phi_i(z)\overline{\Phi_j(z)}\,|dz|=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{4.3}$$

任何一个函数 $f(z)\in L\ (|z|=1)$，关于函数系 $\{\Phi_n(z)\}$ 就对应着一个 Fourier 级数：

$$f(z)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\Phi_k(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\varphi_k(z)+\sum_{k=1}^{+\infty}d_k\psi_k(z) \tag{4.4}$$

其中

$$c_k=\int_{|z|=1}f(z)\overline{\Phi_k(z)}\,|dz|,$$

$$k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots \tag{4.5}$$

* 1981年6月18日收到. 本文(一)刊于本刊第二卷第二期(1982年4月出版).

自然地会提出问题，在（4.4）中等号是否成立，即 $f(z)$ 能否展开为自己的 Fourier 级数。这里的函数系（4.1）最早由 Malmquist 提出[26]，J. L. Walsh 在 1935 年出版的书 [3] 中进行了研究，以后 M. M. Джрбашян, Г. Ц. Тутаркин 等都有深刻的研究。

M. M. Джрбашян 在 1956 年得到了下列定理[27]：

设 1° $|\alpha_n|\leqslant\rho<1$，$n=0.1.\cdots$，

2° $\beta_n=1/\bar{\alpha}_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$

若 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上可积且在某个点 $z=e^{i\theta_0}$ 邻域中有界变差，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,n+1}(\theta_0)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-(n+1)}^{n}C_k\Phi_k(e^{i\theta_0})$$

$$=\frac{1}{2}[f(e^{i(\theta_0+0)})+f(e^{i(\theta_0-0)})] \tag{4.6}$$

当 $\alpha_n=0$，$\beta_n=+\infty$ 时，$n=1,2,\cdots$，这就是普通 Fourier 级数中的结果。

A. A. Китбалян 在 1963 年对情况 $\alpha_k=1/\overline{\beta_k}$，（此时 $\varphi_n(z)=\overline{\psi_n(z)}$），对 $f(z)\in L^p(|z|=1)$，$p\geqslant1$，考虑 $f(z)$ 按 $\{\varphi_n(z)\}$ 展开 Fourier 级数[28]：

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\mathrm{Re}\varphi_n(e^{i\theta})+b_n\mathrm{Im}\varphi_n(e^{i\theta})\}, \tag{4.7}$$

其中

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n}{2}-i\frac{b_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n}{2}+i\frac{b_n}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\mathrm{Re}\varphi_n(e^{it})dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\mathrm{Im}\varphi_n(e^{it})dt.$$

及共轭级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{-b_n\mathrm{Re}\varphi_n(e^{i\theta})+a_n\mathrm{Im}\varphi_n(e^{i\theta})\} \tag{4.8}$$

及 *Abel* 求和

$$f(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\mathrm{Re}\varphi_n(re^{i\theta})+b_n\mathrm{Im}\varphi_n(re^{i\theta})\} \tag{4.9}$$

设

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)=+\infty \tag{4.10}$$

则 1° $\lim\limits_{r\to1-0}f(r,\theta)=f(e^{i\theta})$ 几乎处处成立。

2° 要使（4.7）是某个 $f(z)\in L^p$（$|z|=1$），$p>1$ 的 Fourier 级数的充要条件是

$$\|f(r,\theta)\|_{L^p[-\pi,\pi]}\leqslant\|f\|_{L^p(|z|=1)} \tag{4.11}$$

且
$$\lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r,\theta)-f(e^{i\theta})|^p d\theta=0. \tag{4.12}$$

3° $\lim\limits_{r\to 1-0}\tilde{f}(r,\theta)=\tilde{f}(e^{i\theta})$几乎处处成立，这里 $f(z)\in L^p(|z|=1)$，$p>1$，$\tilde{f}(r,\theta)$是共轭级数（4.8）的 Abel 求和，而
$$\tilde{f}(e^{i\theta})=\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{\pi}[f(e^{i(\theta+t)})-f(e^{i(\theta-t)})]\times\frac{dt}{2\operatorname{tg}t/2}. \tag{4.13}$$

4°
$$\|\tilde{f}(e^{i\theta})\|_{L^p[-\pi,\pi]}\leqslant c_1\|f(e^{i\theta})\|_{L^p[-\pi,\pi]}. \tag{4.14}$$

5°
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it})-S_n(e^{it})|^p dt=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(e^{it})-\overline{S_n}(e^{it})|^p dt=0,$$

其中 $S_n(e^{it})$ 及 $\tilde{S}_n(e^{it})$ 分别是（4.7）及（4.8）的部分和。

如果对于任意的$\{\alpha_k\}$。$|\alpha_k|<1$，$\{\beta_k\}$，$|\beta_k|>1$，1973 年。A. M. Лукацкий[29] 证得将 $f(z)\in L^p$（$|z|=1$），$p>1$，展开为级数（4.4）的问题与用具有极点在$\{\alpha_k\}$及$\{\beta_k\}$的有理函数的逼近问题是等价的。他进一步还证得：

1° 若
$$\lim S_n^+=+\infty,\ \lim S_n^-<+\infty \tag{4.15}$$
则级数（4.4）在（$|z|<1$）$\setminus\left\{\frac{1}{\beta_n}\right\}$内闭一致收敛到有界型亚纯函数 $F^+(z)$。$f(z)$ 是 $F^+(z)$ 的角度边界值。且 $F^+(z)B^+(z)\in H_p$。其中 $B^+(z)$ 是$\left\{\frac{1}{\beta_k}\right\}$的 Blaschke 乘积。

2° 若
$$\lim S_n^+<+\infty,\ \lim S_n^-=+\infty \tag{4.16}$$
则级数（4.4）在（$|z|>1$）$\setminus\left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right\}$内闭一致收敛到有界型亚纯函数 $F^-(z)$。$f(z)$ 是 $F^-(z)$ 的角度边界值。且 $zF^-(z)\ B^-(z)\in H_p'$，其中 $B^-(z)$ 是$\left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right\}$的 Blaschke 乘积。

3° 若
$$\lim S_n^+<+\infty.\ \lim S_n^-<+\infty \tag{4.17}$$
则就同时有 1°与2°中的结果。

这里。我们指出 M. M. Джрбашян 在 1967 年的工作也与此有关[30]。

设 $f(z)\in H_2$，若
$$\lim_{n\to\infty}S_n^+=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|)<+\infty \tag{4.18}$$

则
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{B(\zeta)(\zeta-z)}=f_1(z)+f_2(z),$$

其中$B(\zeta)$是以$\{\alpha_k\}$为零点的Blaschke乘积。而

1° $f_1(z)\in\lambda_2\{\alpha_k\}$。即$f_1(z)\in H_2$，$f_1(z)$ 在$|z|>1$中亚纯，

$$f_1(z)=\frac{B(z)}{z}\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),\ \tilde{f}(z)\in H_2,$$

且几乎处处成立：

$$\lim_{r\to 1-0}f_1(re^{i\theta})=\lim_{r\to 1+0}f_1(re^{i\theta})=f_1(e^{i\theta});$$

2° $f_2(z)\in\tilde{\lambda}_2\{\alpha_k\}$，即$f_2(z)\in H_2$，$f_2(-z)=\frac{1}{z}\tilde{f}_2\left(\frac{1}{z}\right)$，$|z|>1$，$\tilde{f}_2(z)\in H_2$；

3° $$(f_1,f_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}f_1(z)\overline{f_2(z)}|dz|=0,\ \|f\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|C_k|^2+\|f_2\|^2.$$

目前还有不少工作研究在闭可求长曲线Γ为边界的区域G上研究展开问题。

设$M_n(z)$是函数$\varphi_n[\varphi(z)]$在其极点处主要部分之和。这里$\varphi(z)$是上述映射函数，$\frac{1}{\bar{\alpha}_k}=\varphi(b_k)$；显然$M_n(z)$是极点在$\{b_k\}$, $k=0,1,\cdots,n$,上的有理函数。有时考虑$\varphi_n[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)^s$在其极点处的主要部分之和，并记作$M_n^{(s)}(z)$。

1957年，M. M. Джрбашян的结果如下[31]：设

$$\lim S_n=\lim\sum_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|)=\infty$$

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_k}=\varphi(b_k) \tag{4.19}$$

且

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\ g(\zeta)\in L^2(\Gamma) \tag{4.20}$$

当映射函数满足条件

$$\overline{\lim_{r\to 1+0}}\int_0^{2\pi}|\psi'(re^{i\theta})|^2d\theta<+\infty \tag{4.21}$$

时，在G内闭一致地成立

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nM_n(z) \tag{4.22}$$

其中

$$\begin{aligned}d_n&=\frac{1}{i}\int_{|\tau|=1}f[\psi(\tau)]\frac{1}{\tau}\overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}d\tau\\&=\frac{1}{i}\int_{\Gamma}f(\zeta)\frac{1}{\varphi(\zeta)}\varphi_n(1/\overline{\varphi(\zeta)})\varphi'(\zeta)d\zeta\end{aligned} \tag{4.23}$$

Г. С. Кочарян在多连通区域上也有推广[19]。

1974 年，A. M. Лукацкий 对满足条件

$$\overline{\lim_{r\to 1+0}}\int_0^{2\pi}|\psi'(re^{i\theta})|^k d\theta<+\infty, \quad k>1 \tag{4.24}$$

的映射函数在条件（4.19）下，对函数 $f(z)\in E_p$，$p>1$，得到了展开式[32]：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n M_n^{(1)}(z),\quad z\in G, \tag{4.25}$$

其中

$$C_n=\frac{1}{i}\int_{|\tau|=1}f[\psi(\tau)]\frac{1}{\tau}\overline{\varphi_n(1/\bar{\tau})}\psi'(\tau)d\tau \tag{4.26}$$

若 $\bar{G}$ 是任意一个有界闭集，$f(z)$ 在 $\bar{G}$ 上解析，且（4.19）成立．则对 $\bar{G}$ 不必加任何条件在 G 内闭一致地就有展开式（4.25），其中 C_n 也由（4.26）所确定，但积分路线 $|\tau|=1$ 换为某个适当的 $|\tau|=R>1$。

Г. Ц. Тумаркин 在 1961 年[33]对区域 G 的边界（闭可求长）不加任何条件，对函数（4.20），在条件（4.19）下，得到展开式：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n M_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(z),\quad z\in G, \tag{4.27}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{i}\int_{|\tau|=1}g[\psi(\tau)]\frac{1}{\tau}\overline{\varphi_n(1/\bar{\tau})}\psi'(\tau)^{\frac{1}{2}}d\tau \tag{4.28}$$

M. M. Джрбашян 在 1962，1967 年[28,30]又作了进一步的推广．他对区域 G，假设

$$\int_0^{2\pi}|\psi'(e^{i\theta})|^{2(1-s)}d\theta<+\infty, \quad 0\leqslant s\leqslant 1 \tag{4.29}$$

函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

$$\int_{\Gamma}|\varphi(\zeta)|^{2s-1}|g(\zeta)|^2 d\zeta<+\infty \tag{4.30}$$

在条件（4.19）下，有展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n M_n^{(s)}(z),\quad z\in G \tag{4.31}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{i}\int_{|\tau|=1}g[\psi(w)]\frac{1}{\tau}\overline{\varphi_n(1/\bar{\tau})}\psi'(\tau)^s d\tau$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty \tag{4.32}$$

作者在1978年[7,8]对任何区域G，对函数$f(z)\in E_p$，$p>1$，在条件（4.19）下得到了展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n M_n^{(\frac{1}{p})}(z),\quad z\in G, \tag{4.33}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{i}\int_{|\tau|=1} f[\psi(\tau)]\frac{1}{\tau}\overline{\varphi_n(1/\bar{\tau})\psi'(\tau)^{1/p}}\,d\tau \tag{4.34}$$

显然这是上述 M. M. Джрбашян 及 A. M. Лукацкий 工作的推广。当$f(z)\in E_p, p\geqslant 1$时，则有广义 Abel 求和：

$$f(z)=\lim_{R\to 1+0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{|\tau|=1} f[\psi(\tau)]\psi'(\tau)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{R\tau}\overline{\varphi_n(1/R\bar{\tau})}d\tau M_n^{(\frac{1}{p})}(z),\quad z\in G. \tag{4.35}$$

在下一节中，我们还要介绍有理函数展开的部分和逼近函数时阶的估计式。

现在我们再讨论条件（4.19）不满足时的情况。

若

$$\lim S_n=\lim\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)<+\infty \tag{4.36}$$

$$1/\overline{\alpha_k}=\varphi(b_k).$$

对于函数（4.20），若展开式（4.27）在区域G内闭一致成立，则$g(\zeta)$是G_∞中有界型亚纯函数$F^-(z)$的角度边界值，且$F^-(z)B(z)\in E_2(G_\infty)$，其中$B(z)$是具有零点在$\{1/\bar{\alpha}_k\}$的Blaschke乘积，这个结果也是属于 Г. Ц. Тумаркин 的[33]。

以后 M. M. Джрбашян[26,30]又作了推广：

1° 设区域G满足条件（4.29），函数$f(z)$满足条件（4.30），则在条件（4.36）下，就有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n M_n^{(s)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{g[\psi(\tau)]\psi'(\tau)^s}{\tau B(\tau)}\omega\left(\frac{1}{\tau},z\right)d\tau,\quad z\in G, \tag{4.37}$$

其中C_n由（4.32）确定，$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2<+\infty$，函数

$$\omega(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{B(\tau)\psi'(\tau)^{1-s}}{[\psi(\tau)-z](1-\zeta\tau)}d\tau\in H_2$$

当$\zeta\to e^{-i\theta}$时的角度边界值为$\omega\left(\frac{1}{w},z\right)$，$w=e^{i\theta}$，且级数（4.37）在G内闭一致绝对收敛。

2° 引入函数类$E_2^{(s)}(G_\infty,\alpha_k)$：

$$F(z)=\frac{B[\varphi(z)]}{\varphi(z)}\varphi'(z)^s\tilde{F}\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right),\quad z\in G_\infty,\quad \tilde{F}\in H_2.$$

其中 $B(z)$ 为以 $\{\alpha_k\}$ 为零点的 Blaschke 乘积，$1/\bar{\alpha}_k=\varphi(b_k)$。$k=0,1,\cdots$。

再引入函数类 $\lambda_2\{G,G_\infty,\alpha_k\}$：$f(z)$ 定义在区域 $G\cup G_\infty\setminus\{1/\bar{\alpha}_k\}$ 上。且

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\ z\in G$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+F(z),\ z\in G_\infty$$

其中 $F(z)\in E_2^{(s)}(G_\infty,\alpha_k)$，$g(\zeta)=F(\zeta)$，$\zeta\in\Gamma$。

当满足条件（4.36）时，函数类 $\lambda_2(G,G_\infty,\alpha_k)$ 等价于 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nM_n^{(s)}(z)$，$z\in G\cup G_\infty\setminus\left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right\}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|C_n|^2<+\infty$，其中 C_n 由（4.32）所确定。

§5　有理函数展开的部分和及余项估计

对于上一节中各种展开式（4,4）、（4.32）中的部分和本身或用部分和来逼近原来的函数的速度都存在着估计式，这一节准备介绍这方面的一些结果。

先考虑单位园的情况。

A. M. Лукацкий 1973 年得到下列结果[29]：设 $f(z)\in L^p(|z|=1)$，$p>1$，对于展开式(4.4)中的部分和，有

$$\|S_{n,m}(z)\|_{L^p(|z|=1)}\leqslant C_p\|f(z)\|_{L^p(|z|=1)}\tag{5.1}$$

C_p 是常数。而 A. A. Китбалян 在 1963 年只在 $\beta_k=1/\bar{\alpha}_k$，$k=0,1,\cdots$，情况下才得到类似的结果[28]。

对于空间 $C(|z|=1)$，Г. С. Кочарян 在 1958 年得到估计[19]：

$$\|S_{n,m}(z)\|_{C(|z|=1)}\leqslant(\pi+\ln r_{n,m})\|f(z)\|_{C(|z|=1)}.\tag{5.2}$$

其中

$$r_{n,m}=\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)^{-1}+\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{|\beta_k|}\right)^{-1}.\tag{5.3}$$

最近苏兆龙在 $L^1(|z|=1)$ 上也得到了形如（5.2）的估计式[39]。

显然，这些结果大大地推广了通常 Fourier 级数部分和的估计式。

对于一般的区域，Г. С. Кочарян 在 1958 年[19]曾考虑 Альпер 区域(见条件 j_1，公式(3.12))，利用 С. Н. Мергелян 及 М. М. Джрбашян 的结果[12]，对 $f(z)$ 在G的边界 Γ 上满足 Lipα，$0<\alpha\leqslant1$，的函数，对于 $\varphi_n[\varphi(z)]$ 在极点主要部分之和 $M_n(z)$，及 $\psi_n[\chi(z)]$ 在极点主要部分之和 $N_n(z)$ 的展开式中部分和

$$S_{n,m}(z)=\sum_{k=0}^{n}C_kM_k(z)+\sum_{k=0}^{m}d_kN_k(z)$$

得到了估计式

$$\|f(z)-S_{n,m}(z)\|_{C(\Gamma)}\leqslant C_1\{[\varepsilon_n(\alpha)|\ln\varepsilon_n(\alpha)|]^a+[\varepsilon_n(\beta)|\ln\varepsilon_n(\beta)|]^a\} \tag{5.4}$$

由于 Мергелян 及 Джрбашян 的结果是不精确的，因此这结果也不是精确的。

作者对于满足条件（1.9）的区域，E_p，$p>1$，中函数，对于展开式（4.22）中的部分和 $S_n(z)$，得到了余项估计式[34]：

$$\|f(z)-S_n(z)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant C_1E_n^{(p)}(f,\alpha_k)\leqslant C_1\{\varepsilon_n(\alpha)^k\omega_p(f^{(k)},\varepsilon_n(\alpha))+r^{1/\varepsilon_n(\alpha)}\} \tag{5.5}$$

其中 $E_n^{(p)}(f,\alpha_k)$ 是用具有极点在$\{b_k\}$，$b_k\in G_\infty$，$k=0,1,\cdots,n$，的有理函数在$L^p(\Gamma)$ 空间中进行逼近时的最佳逼近值，$1/\bar{\alpha}_k=\varphi(b_k)$，$\varepsilon_n(\alpha)=\sum\limits_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|)$，$r$ 是绝对常数，$0<r<1$。（在原文中多一个 $\ln\sum\limits_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|)^{-1}$，这实际上是可以取消的，见[7,35]），这里在最后一个不等式中还假设了 $f^{(k)}(z)\in E_p$，$p>1$。

在作者的文章[7.35]中，对于 K_q 类区域，用（4.33）的部分和 $S_n^{(\frac{1}{p})}(z)$。也得到了类似于（5.5）的估计式。

此外，作者还在文章[25]中，得到一致逼近意义下的估计式：设区域 $G\in j\lambda$（见公式(3.12)），$0\leqslant\lambda\leqslant1$，$f(z)$ 在G内解析，$\bar{G}$ 上连续，则用（4.33）的部分和 $S_n^{(\frac{1}{p})}(z)$ 在一致逼近意义下进行逼近 $f(z)$ 时，也有估计式：

$$\begin{aligned}&\|f(z)-S_n^{(\frac{1}{p})}(z)\|_{C(\Gamma)}\\&\leqslant C_1[\ln\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)^{-1}]\times[\ln\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)^{-1}+\ln\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)]^{1-\lambda}E_n(f,\alpha_k)\\&\leqslant C_1[\ln\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)^{-1}]\times[\ln\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)^{-1}+\ln\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)]^{1-\lambda}[\varepsilon_n(\alpha)^k\\&\qquad\omega(f^{(k)},\varepsilon_n(\alpha))+r^{1/\varepsilon_n(\alpha)}],\end{aligned}$$

这里在最后一个不等式中假设 $f^{(k)}(z)$ 在 $\bar{G}$ 连续。

苏兆龙还在 Альпер 区域中在 $L^1(\Gamma)$ 上得到估计式[39]。

§6　有理函数级数

若

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty \tag{6.1}$$

则

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varphi_k(z)=F(z)$$

在$|z|=1$上平均收敛于$F(z)\in L^2(|z|=1)$，且级数在$|z|<1$内闭一致收敛到$F(z)$，反之亦然。

若
$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty, \tag{6.2}$$

则 1° $\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varphi_k(z)=F(z)$在$|z|=1$上平均收敛；

2° $\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varphi_k(z)=F(z)$在$|z|<1$内闭一致收敛，$F(z)\in H_2$；

3° $\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varphi_k(z)$ 在 $(|z|>1)\setminus\{1/\bar{\alpha}_k\}$内闭一致且绝对收敛到$F(z)\in H_2\{\alpha_k\}$，即

$$F(z)=\frac{B(z)}{z}\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),\quad |z|>1,\quad \tilde{f}\in H_2,$$

$B(z)$ 是以$\{\alpha_k\}$为零点的 Blaschke 乘积。

反过来也对，这些结果可以在 M. M. Джрбашян 的文章[30]中可以找到。

对于一般区域的情况，Г. Ц. Тумаркин 在 1961 年[33]考虑满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty,\quad 1/\bar{\alpha}_k=\varphi(b_k),$$
$$b_k\in G_\infty \tag{6.3}$$

的序列$\{b_k\}$。若$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2<+\infty$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_nM_n^{(\frac{1}{2})}(z)=f(z)$$

有 Cauchy 型积分表示：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad g(\zeta)\in L^2(\Gamma)$$

(这里考虑 Смирнов 区域，因而有$f(z)\in E_2$)。

M. M. Джрбашян[30]对于满足条件(4.29)的区域，若$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|^2<+\infty$，则在条件(6.3)下，级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_nM_n^{(s)}(z)$ 在G中内闭一致及绝对收敛到函数$f_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$，其中$g(\zeta)$ 满足条件 (4.30)。

若条件 (6.3) 不满足，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|<+\infty,\quad 1/\bar{\alpha}_k=\varphi(b_k)$$
$$b_k\in G_\infty \tag{6.4}$$

则级数$\sum_{n=0}^{\infty}C_nM_n^{(s)}(z)$ 在$G_\infty\setminus\{1/\bar{\alpha}_k\}$内闭一致且绝对收敛到亚纯函数

$$f_e(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+F(z),\quad z\in G_\infty$$

其中$g(\zeta)$是满足条件（4.30）且是$F(z)\in E_2^{(s)}(G_\infty,\alpha_k)$的角度边界值，并且

$$\lim_{\varepsilon\to0}\{f_i[\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}]-f_e[\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}]\}=0,$$

对$|\psi_0|\leqslant\frac{\pi}{2}\theta$，$0<\theta<1$，一致地成立。$\varphi_0$是$\zeta_0$在$\Gamma$上切线与正实轴上夹角，上式在$\Gamma$上几乎处处成立。

编辑部注：参考文献见本文(一)之后(本刊 Vol. 2, No. 2).

会 议 简 讯

全国组合数学学术讨论会第二次筹备会议，于1983年3月27日至29日，在广州石牌华南师范大学召开。予会单位有：华中工学院、大连工学院、华南师范大学、暨南大学、中国科学院合肥分院计算中心、西北电讯工程学院。会议议定：

1．于今年7月25日至31日，在大连工学院召开全国组合数学学术讨论会首次会议。

2．大会代表名额分配方案。

3．会议通知将由大连工学院分别向予会代表发出。

中国组合数学学术讨论会

第二次筹备会

一九八三年四月二日