第3卷 第2期
1983年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.2
Apr. 1983

重复变函数（上）*

濮德潜

（兰州大学）

本文讨论特定的一种超复数系（称为重复数环）上的函数．它与多元复变函数、双曲方程发生联系．使我们能用复变函数方法去研究双曲方程．

§1 重复数环

一 重复数

我们取符号 i,j,k，将实数域上四维向量空间的向量 (x_0,x_1,x_2,x_3) 记为 $Z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$，定义乘法：

$$i^2=j^2=-1,\quad ij=k,$$

并设乘法可换、可群、与向量加法可分配，这样就形成一个代数，称为重复数环，记作 $\mathscr{C}^2$．$\mathscr{C}^2$ 的元素称为重复数．

$\mathscr{C}^2$ 中所有零因子和零的集合称为零集，记作$\mathscr{O}$．$Z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3\in\mathscr{O}$的充要条件为

$$\begin{cases}x_0=x_3\\x_1=-x_2\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x_0=-x_3\\x_1=x_2.\end{cases}$$

设

$$Z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3,$$

令 $Z^{\mathrm{I}}=x_0+ix_1-jx_2-kx_3$，$Z^{\mathrm{II}}=x_0-ix_1+jx_2-kx_3$，$Z^{\mathrm{III}}=x_0-ix_1-jx_2+kx_3$．
则 $ZZ^{\mathrm{I}},Z^{\mathrm{II}}Z^{\mathrm{III}}$ 为共轭复数．记

$$|Z|=\sqrt[4]{ZZ^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{II}}Z^{\mathrm{III}}}$$

称 $|Z|$ 为 Z 的模，且有公式

$$|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$$

但关于模没有三角不等式．

$Z\bar{\in}\mathscr{O}$，当且仅当 $|Z|\neq0$，这时 Z 有逆

$$Z^{-1}=\frac{Z^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{II}}Z^{\mathrm{III}}}{|Z|^4}.$$

* 1981年5月20日收到．

二 Dedekind 定理

关于可换代数有 Dedekind 分解定理[1]，这里我们给出此定理的一个证明。

域 P 上 n 维向量空间中定义的可换代数设有么元素 e，且 $a\neq 0$ 时 $a^2\neq 0$，记此种代数为 $\mathscr{A}$。$\mathscr{A}$ 中所有零因子和零之集记为 $\mathscr{O}$，则 $\mathscr{A}-\mathscr{O}=\widetilde{\mathscr{A}}$ 对乘法成群，$\mathscr{O}-\{0\}$ 中互为零因子的元素线性无关。

引理 1.1 设 $a\in\mathscr{O}$，则存在 $b\in\mathscr{A}$，使

$$ab=0,\ \text{且}\ a+b\in\widetilde{\mathscr{A}}.$$

证 如果 $a=0$，取 $b=e$ 即可。如果 $a\neq 0$，则存在 $b_1\neq 0$，使 $ab_1=0$，当 $a+b_1\in\widetilde{\mathscr{A}}$ 取 $b=b_1$ 即可。当 $a+b_1\in\mathscr{O}$，必有 $b_2\neq 0$ 使 $(a+b_1)b_2=0$，即 $b_1b_2=-ab_2$，从而 $(b_1b_2)^2=0$，所以有

$$b_1b_2=0,\ ab_2=0,$$

即 a,b_1,b_2 互为零因子。当 $a+b_1+b_2\in\widetilde{\mathscr{A}}$ 取 $b=b_1+b_2$ 即可。当 $a+b_1+b_2\in\mathscr{O}$，必有 $b_3=0$ 使 $(a+b_1+b_2)b_3=0,\cdots$，到第 p 步，即 $a,b_1,b_2,\cdots,b_p$ 互为零因子，当 $a+b_1+b_2+\cdots+b_p\in\widetilde{\mathscr{A}}$，取 $b=b_1+b_2+\cdots+b_p$ 即可。当 $a+b_1+b_2+\cdots+b_p\in\mathscr{O}$，必有 $b_{p+1}\neq 0$，使 $(a+b_1+b_2+\cdots+b_p)\,b_{p+1}=0$，即 $ab_{p+1}=-(b_1+b_2+\cdots+b_p)\,b_{p+1}$，$b_q\,b_{p+1}=-(a+b_1+\cdots+b_{q-1}+b_{q+1}+\cdots+b_p)b_{p+1}$，从而 $(ab_{p+1})^2=0$，$(b_qb_{p+1})^2=0$，所以有

$$ab_{p+1}=0,\ b_qb_{p+1}=0,\qquad 1\leqslant q\leqslant p,$$

即 $a,b_1,b_2,\cdots b_p,b_{p+1}$ 互为零因子，它们是线性无关的。因而这种手续不能无限地进行，即在第 r 步 $(r<n)$ 可得

$$a+b_1+b_2+\cdots+b_r\in\widetilde{\mathscr{A}},$$

这时取 $b=b_1+b_2+\cdots+b_r$ 得所欲证。

引理 1.2 设 $a\neq 0$，$a\mathscr{A}$ 中存在么元素 e_a。

证 如果 $a\in\widetilde{\mathscr{A}}$，这时 $a\mathscr{A}=\mathscr{A}$，显然 $e_a=e$。如果 $a\in\mathscr{O}$，则存在 $b\in\mathscr{A}$ 使 $ab=0$，$a+b\in\widetilde{\mathscr{A}}$，由 $a(a+b)=a^2$ 知 $a^2(a+b)^{-1}=a$，我们取 $e_a=a(a+b)^{-1}$，显然 $e_a\in a\widetilde{\mathscr{A}}\subset a\mathscr{A}$。任意 $x\in a\mathscr{A}$，可设 $x=at$，则

$$xe_a=ata(a+b)^{-1}=at=x.$$

引理 1.3 设 $a\neq 0$，则 $a\widetilde{\mathscr{A}}$ 对 $\mathscr{A}$ 中乘法成群。

证 在引理 1.2 的证明中知 $a\widetilde{\mathscr{A}}$ 中有么元素 $e_a=a(a+b)^{-1}$。设任意 $x\in a\widetilde{\mathscr{A}}$，可设 $x=at$，$t\in\widetilde{\mathscr{A}}$。取 $x^{-1}=a(a+b)^{-2}t^{-1}$，显然 $x^{-1}\in a\widetilde{\mathscr{A}}$，且

$$xx^{-1}=ata(a+b)^{-2}t^{-1}=a^2(a+b)^{-2}=e_a^2=e_a.$$

因此 $a\widetilde{\mathscr{A}}$ 中任意元素有逆，现证 $a\widetilde{\mathscr{A}}$ 中乘法封闭。

若 $a\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$a\widetilde{\mathscr{A}}$ 中乘法封闭是显然的。若 $a\in\mathscr{O}$，而 $a\neq 0$，则有 $b\in\mathscr{A}$ 使 $ab=0$，$a+b\in\widetilde{\mathscr{A}}$，任意 $x,y\in a\widetilde{\mathscr{A}}$ 可设 $x=at$，$y=as$，$s,t\in\widetilde{\mathscr{A}}$，于是有 $xy=a^2ts=a(a+b)ts$，而 $(a+b)ts\in\widetilde{\mathscr{A}}$，所以 $xy\in a\widetilde{\mathscr{A}}$。

引理 1.4　设 $a\neq 0$，则 $\widetilde{a\mathscr{A}}=a\widetilde{\mathscr{A}}$.

证　我们的记法：$\widetilde{a\mathscr{A}}$ 表 $a\mathscr{A}$ 中抛去了 $a\mathscr{A}$ 中的所有零因子和零之余集．由引理 1.3 知 $\widetilde{a\mathscr{A}}\supset a\widetilde{\mathscr{A}}$．设 $x\in\widetilde{a\mathscr{A}}$，若 $x\in\widetilde{\mathscr{A}}$ 则 $x=xe_a=xa(a+b)^{-1}$，因此 $x\in a\widetilde{\mathscr{A}}$；若 $x\in\mathscr{O}$，则存在 $y\in\mathscr{A}$，使 $xy=0$，$x+y\in\widetilde{\mathscr{A}}$，则 $ye_a=0$，否则 $ye_a=c\neq 0$，因 $c=ya(a+b)^{-1}\in a\mathscr{A}$，而 $cx=0$，这和 $x\in\widetilde{a\mathscr{A}}$ 矛盾，故 $x=xe_a=xe_a+ye_a=(x+y)e_a=(x+y)a\cdot(a+b)^{-1}\in a\widetilde{\mathscr{A}}$．即 $\widetilde{a\mathscr{A}}\subset a\widetilde{\mathscr{A}}$，所以 $\widetilde{a\mathscr{A}}=a\widetilde{\mathscr{A}}$．证毕．

如果存在互为零因子的 s，t 使

$$a\mathscr{A}=s\mathscr{A}+t\mathscr{A}$$

则称 $a\mathscr{A}$ 可分，否则称 $a\mathscr{A}$ 不可分．

引理 1.5　设 $a\neq 0$，$a\mathscr{A}$ 不可分的充要条件为 $a\mathscr{A}=\widetilde{a\mathscr{A}}+\{0\}$.

证　当 $a\mathscr{A}$ 可分，即 s，t 互为零因子，且 $a\mathscr{A}=s\mathscr{A}+t\mathscr{A}$，知 s，$t\in a\mathscr{A}$，这表明条件是充分的．现证必要性．$a\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 的子代数．设在 $a\mathscr{A}$ 中有零因子 $t\neq 0$，在 $a\mathscr{A}$ 中可用引理 1.1，即存在 $s\in a\mathscr{A}$，$s\neq 0$，使 $st=0$，且 $s+t\in\widetilde{a\mathscr{A}}$．设 $x\in a\mathscr{A}$，注意到 $s+t$ 在 $a\mathscr{A}$ 中有逆，则

$$x=x(s+t)(s+t)^{-1}=sx(s+t)^{-1}+tx(s+t)^{-1},$$

即 $x\in s\mathscr{A}+t\mathscr{A}$．于是 $a\mathscr{A}\subset s\mathscr{A}+t\mathscr{A}$．相反的包含关系是明显的．知 $a\mathscr{A}=s\mathscr{A}+t\mathscr{A}$．引理证毕．

根据引理 1.3、1.4、1.5 可得

引理 1.6　$a\mathscr{A}$ 为不可分的充要条件是 $a\mathscr{A}$ 为域．

定理 1.7　（Dedekind 定理）$\mathscr{A}$ 可表为不可分陪集（域）的直接和．且这种表示是唯一的．

证　如果 $\mathscr{A}$ 中无零因子，则 $A=e\mathscr{A}$ 为不可分．如果 $\mathscr{A}$ 中有零因子，根据引理 1.5 存在互为零因子的 s_1,s_2，使

$$\mathscr{A}=s_1\mathscr{A}+s_2\mathscr{A}.$$

如 $s_1\mathscr{A}$，$s_2\mathscr{A}$ 均不可分，定理第一部分已证．否则可分的 $s_p\mathscr{A}$（$p=1$ 或 2）还可继续分下去．如此等等

$$\mathscr{A}=t_1\mathscr{A}+t_2\mathscr{A}+\cdots+t_m\mathscr{A}+\cdots$$

由于 t_i 互为零因子，它们线性无关，所以到有限步便不能再分了．即

$$\mathscr{A}=a_1\mathscr{A}+a_2\mathscr{A}+\cdots+a_r\mathscr{A}.$$

$r\leqslant n$，$a_p(p=1,2,\cdots r)$ 互为零因子，$a_p\mathscr{A}$（$p=1,2,\cdots r$）不可分．

又若

$$\mathscr{A}=b_1\mathscr{A}+b_2\mathscr{A}+\cdots+b_s\mathscr{A},$$

b_p（$p=1,2,\cdots s$）互为零因子，$b_p\mathscr{A}$（$p=1,2,\cdots s$）不可分．显然 a_1 不可能与所有 b_p 之积为零．改变脚码次序，可设 $a_1b_1\neq 0$，于是 a_1b_1 为 $a_1\mathscr{A}$，$b_1\mathscr{A}$ 的公有非零元素．又由于

$a_1\mathscr{A}$，$b_1\mathscr{A}$ 不可分，由引理 1.5 知 $a_1\mathscr{A}=\widetilde{a_1\mathscr{A}}+\{0\}=a_1\widetilde{\mathscr{A}}+\{0\}$，$b_1\mathscr{A}=\widetilde{b_1\mathscr{A}}+\{0\}=b_1\widetilde{\mathscr{A}}+\{0\}$，于是 a_1b_1 为 $a_1\widetilde{\mathscr{A}}$ 和 $b_1\widetilde{\mathscr{A}}$ 的公有元素，从而 $a_1\widetilde{\mathscr{A}}=b_1\widetilde{\mathscr{A}}$，得 $a_1\mathscr{A}=b_1\mathscr{A}$。注意到 $a_2b_1=0$，相仿可证 $a_p\mathscr{A}=b_p\mathscr{A}, p=2,3,\cdots r$。从上面的证法中知 $s\geqslant r$，同理 $s\leqslant r$，所以 $s=r$。定理得证。

由于 $a\mathscr{A}=e_a\mathscr{A}$，令定理 1.7 中 $a_p\mathscr{A}$ 的么元素为 e_p（$p=1,2,\cdots r$）知：

$$\mathscr{A}=e_1\mathscr{A}+e_2\mathscr{A}+\cdots+e_r\mathscr{A},$$

其中 $e_pe_q=\delta_{p,q}e_p$。$\delta_{p,q}=0$ 当 $p\neq q$，$\delta_{p,q}=1$ 当 $p=q$。$\mathscr{A}$ 中任意元素

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_r$$

其中 $x_p\in e_p\mathscr{A}$，这种表示也是唯一的：$x_p=xe_p$（$p=1,2,\cdots r$）。特别

$$e=e_1+e_2+\cdots+e_r.$$

三 重复数的表示

由于 Dedekind 分解定理，对于 $\mathscr{C}^2$，我们取

$$e_1=\frac{1-k}{2},\qquad e_2=\frac{1+k}{2}.$$

则 $e_pe_q=\delta_{p,q}e_p$（$p,q=1,2$）且 $e_1+e_2=1$。

设 $Z=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$，令

$$\begin{cases} z_1=x_0+ix_1,\\ z_2=x_2+ix_3,\end{cases}\quad \begin{cases} w_1=x_0+jx_2,\\ w_2=x_1+jx_3,\end{cases}\quad \begin{cases} \xi_1=x_0+kx_3,\\ \xi_2=x_1-kx_2,\end{cases}\quad \begin{cases} \zeta_1=(x_0-x_3)+i(x_1+x_2),\\ \zeta_2=(x_0+x_3)+i(x_1-x_2),\end{cases}$$

则

$$Z=z_1+jz_2=w_1+iw_2=\xi_1+i\xi_2=e_1\zeta_1+e_2\zeta_2,$$
$$\zeta_1=z_1+iz_2,\ \zeta_2=z_1-iz_2. \tag{1.1}$$

以下的记号均与此处意义相同。如还可令 $\zeta_1'=(x_0-x_3)+j(x_1+x_2)$，$\zeta_2'=(x_0+x_3)+j(x_2-x_1)$，而 $Z=e_1\zeta_1'+e_2\zeta_2'$，但我们不采取这种记法。

易知

$$|Z|=\sqrt{|z_1^2+z_2^2|}=\sqrt{|w_1^2+w_2^2|}=\sqrt{|\xi_1^2+\xi_2^2|}=\sqrt{|\zeta_1\zeta_2|}.$$

当 $|Z|\neq 0$，$\sqrt[n]{Z}$ 有 n^2 个根。

由于 $|Z|$ 没有三角不等式，我们另考虑如下：设 $Z=e_1\zeta_1+e_2\zeta_2$，$Z^*=e_1\zeta_1^*+e_2\zeta_2^*$，置

$$\|Z\|=(|\zeta_1|,|\zeta_2|)$$

称 $\|Z\|$ 为 Z 的重模。规定：

(1) $\|Z\|\|Z^*\|=(|\zeta_1||\zeta_1^*|,|\zeta_2||\zeta_2^*|)$；

(2) $\|Z\|+\|Z^*\|=(|\zeta_1|+|\zeta_1^*|,|\zeta_2|+|\zeta_2^*|)$；

(3) $\|Z\|\leqslant\|Z^*\|$，当且仅当 $|\zeta_1|\leqslant|\zeta_1^*|$，且 $|\zeta_2|\leqslant|\zeta_2^*|$；

(4) 简记 $(a,a)=a$ $\qquad(a\geqslant 0)$，

则

I)　$\|Z\|\geqslant 0$，而 $\|Z\|=0$，当且仅当 $Z=0$；

II)　$\|ZZ^*\|=\|Z\|\|Z^*\|$；

III)　$\|Z+Z^*\|\leqslant\|Z\|+\|Z^*\|$；

IV)　$\leqslant$ 使 $\{\|Z\|\}$ 构成可分配格。

以后我们约定用重模来定义 $\mathscr{C}^2$ 上的拓扑，并在此拓扑下讨论极限问题。

由 Z 的重模 $\|Z\|=(|\zeta_1|,|\zeta_2|)$ 所规定的极限和由 Z 的欧氏模 $[Z]\equiv\sqrt{\frac{|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2}{2}}$ $=\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 所规定的极限是等价的，因为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|Z\|\leqslant[Z]\leqslant\max\{|\zeta_1|,|\zeta_2|\}.$$

§2　重复变函数

一　微分算子

设 F(Z) 为 $\mathscr{C}^2$ 内到 $\mathscr{C}^2$ 内的单值函数：

$$F(Z)=U_0(Z)+iU_1(Z)+jU_2(Z)+kU_3(Z),$$

这里 $U_p(Z)$ $(p=0,1,2,3)$ 为定义在 $\mathscr{C}^2$ 内的实值函数。称 F(Z) 为重复变函数。令

$$\begin{cases}G_1(Z)=U_0+iU_1\\G_2(Z)=U_2+iU_3,\end{cases}\quad\begin{cases}H_1(Z)=U_0+jU_2\\H_2(Z)=U_1+jU_3,\end{cases}\quad\begin{cases}\Gamma_1(Z)=U_0+kU_3\\\Gamma_2(Z)=U_1-kU_2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi_1(Z)=(U_0-U_3)+i(U_1+U_2)\\\Phi_2(Z)=(U_0+U_3)+i(U_1-U_2),\end{cases}$$

则

$$F(Z)=G_1+jG_2=H_1+iH_2=\Gamma_1+i\Gamma_2=e_1\Phi_1+e_2\Phi_2,$$
$$\Phi_1=G_1+iG_2,\ \ \Phi_2=G_1-iG_2. \tag{2.1}$$

由（1.1）式我们对函数的记法作如下约定：

$$F(Z)=F(z_1,z_2)=F(w_1,w_2)=F(\xi_1,\xi_2)=F(\zeta_1,\zeta_2).$$

以下我们设 Ω_{ζ_1} 和 Ω_{ζ_2} 分别为复平面 ζ_1 和 ζ_2 上的区域。令 $\Omega=\Omega_{\zeta_1}\times\Omega_{\zeta_2}$。易知这时$\Omega$关于二元复数 (z_1,z_2) 和 (w_1,w_2) 亦为区域。并设 $F(Z)$ 在 Ω 局部有界，且存在偏导数[2]

$$U_{p,q}=\frac{\partial U_p}{\partial x_q},\qquad p,q=0,1,2,3.$$

令

$$\frac{\partial}{\partial Z}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}-i\frac{\partial}{\partial x_1}-j\frac{\partial}{\partial x_2}+k\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad\frac{\partial}{\partial Z^{\mathrm{I}}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}-i\frac{\partial}{\partial x_1}+j\frac{\partial}{\partial x_2}-k\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial Z^{\mathrm{II}}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+i\frac{\partial}{\partial x_1}-j\frac{\partial}{\partial x_2}-k\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad\frac{\partial}{\partial Z^{\mathrm{III}}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+i\frac{\partial}{\partial x_1}+j\frac{\partial}{\partial x_2}+k\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

则

$$\frac{\partial}{\partial Z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-j\frac{\partial}{\partial z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1}-i\frac{\partial}{\partial w_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)$$
$$=e_1\frac{\partial}{\partial\zeta_1}+e_2\frac{\partial}{\partial\zeta_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z^{I}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+j\frac{\partial}{\partial z_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}-i\frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1}-i\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2}\right)$$
$$=e_1\frac{\partial}{\partial \zeta_2}+e_2\frac{\partial}{\partial \zeta_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial Z^{II}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}-j\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w_1}+i\frac{\partial}{\partial w_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1}+i\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)$$
$$=e_1\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2}+e_2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}$$
$$\frac{\partial}{\partial Z^{III}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}+j\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}_1}+i\frac{\partial}{\partial \bar{w}_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)$$
$$=e_1\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}+e_2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} \tag{2.2}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots\frac{\partial}{\partial w_2},\cdots\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2}$ 等其定义亦如通常复变函数中所用记号，而规定：

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}+k\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}-k\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\cdots.$$

二　半解析函数和解析函数

定义 2.1　如果在 Ω，$\frac{\partial F(Z)}{\partial Z^{III}}=0$，称 $F(Z)$ 在 Ω 半解析。

详细写出 $\frac{\partial F(Z)}{\partial Z^{III}}=0$，即

$$\begin{cases} U_{0;0}-U_{1;1}-U_{2;2}+U_{3;3}=0,\ U_{1;0}+U_{0;1}-U_{3;2}-U_{2;3}=0, \\ U_{2;0}-U_{3;1}+U_{0;2}-U_{1;3}=0,\ U_{3;0}+U_{2;1}+U_{1;2}+U_{0;3}=0. \end{cases} \tag{2.3}$$

利用关系式（2.2）得

定理 2.1　$F(Z)$ 在 Ω 上半解析的充要条件为：当 $\zeta_2\in\Omega_{\zeta_2}$ 时，$\Phi_1(Z)=\Phi_1(\zeta_1,\zeta_2)$ 是 ζ_1 在 Ω_{ζ_1} 上的解析函数，同时当 $\zeta_1\in\Omega_{\zeta_1}$ 时，$\Phi_2(Z)=\Phi_2(\zeta_1,\zeta_2)$ 是 ζ_2 在 Ω_{ζ_2} 上的解析函数。

由（2.3）式和（1.1）式成立着：

定理 2.2　$F(Z)$ 在 Ω 半解析，且 G_2（或 G_1）为常数时，则 $G_1(Z)=G_1(z_1,z_2)=G_1(\zeta_1,\zeta_2)$（或 $G_2(Z)=G_2(z_1,z_2)=G_2(\zeta_1,\zeta_2)$）为 z_1,z_2 的二元解析复函数，也是 ζ_1,ζ_2 的二元解析复函数；且 $\Phi_1(Z)=\Phi_2(Z)=\Phi(z_1,z_2)=\Phi(\zeta_1,\zeta_2)$（或 $\Phi_1(Z)=-\Phi_2(Z)=\Phi(z_1,z_2)=\Phi(\zeta_1,\zeta_2)$）为 z_1,z_2 的二元解析复函数，也是 ζ_1,ζ_2 的二元解析复函数。

定理 2.3　$F(Z)$ 在 Ω 半解析，且 H_2（或 H_1）为常数时，则 $H_1(Z)=H_1(w_1,w_2)$（或 $H_2(Z)=H_2(w_1,w_2)$）为 w_1,w_2 的二元解析复函数。

定义 2.2　如果在 Ω，$\frac{\partial F(Z)}{\partial Z^{III}}=\frac{\partial F(Z)}{\partial Z^{II}}=0$，称 $F(Z)$ 在 Ω 解析。

再利用（2.2）式得：

定理 2.4　$F(Z)$ 在 Ω 解析的充要条件为：$G_p(Z)$，$\Phi_p(Z)$ $p=1,2$ 都是 z_1，z_2 的二元解析复函数（也都是 ζ_1，ζ_2 的二元解析复函数）。

三　重解析函数和复调和函数

定义 2.3　如果在 Ω，$\dfrac{\partial F(Z)}{\partial Z^{\mathrm{III}}}=\dfrac{\partial F(Z)}{\partial Z^{\mathrm{II}}}=\dfrac{\partial F(Z)}{\partial Z^{\mathrm{I}}}=0$，称 $F(Z)$ 在 Ω 重解析.

还是由（2.2）式得

定理 2.5　$F(Z)$ 在 Ω 重解析的充要条件为下列之一：

（Ⅰ）$\Phi_1(Z)=\Phi_1(\zeta_1,\ \zeta_2)=\Phi_1(\zeta_1)$ 在 Ω_{ζ_1} 为 ζ_1 的单元解析复函数，与 ζ_2 无关；同时 $\Phi_2(Z)=\Phi_2(\zeta_1,\zeta_2)=\Phi_2(\zeta_2)$ 在 Ω_{ζ_2} 为 ζ_2 的单元解析复函数，与 ζ_1 无关.

（Ⅱ）$F(Z)$ 在 Ω 可导：对任意 $Z\in\Omega$,

$$\lim_{0<\|\Delta Z\|\to 0}\frac{F(Z+\Delta Z)-F(Z)}{\Delta Z}=F'(Z)=\frac{\partial F}{\partial Z}.$$

（Ⅲ）
$$\begin{cases} U_{0;0}=U_{1;1}=U_{2;2}=U_{3;3},\ U_{1;0}=-U_{0;1}=U_{3;2}=-U_{2;3},\\ U_{2;0}=U_{3;1}=-U_{0;2}=-U_{1;3},\ U_{3;0}=-U_{2;1}=-U_{1;2}=U_{0;3}.\end{cases}$$

（Ⅳ）$G_p(Z)=G_p(z_1,z_2)$，$p=1,2$ 为 z_1,z_2 的二元解析复函数，且

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_1}=\frac{\partial G_2}{\partial z_2},\qquad \frac{\partial G_1}{\partial z_2}=-\frac{\partial G_2}{\partial z_1}.$$

（Ⅴ）$H_p(Z)=H_p(w_1,w_2)$　$p=1,2$ 为 w_1,w_2 的二元解析复函数，且

$$\frac{\partial H_1}{\partial w_1}=\frac{\partial H_2}{\partial w_2},\qquad \frac{\partial H_1}{\partial w_2}=-\frac{\partial H_2}{\partial w_1}.$$

当 $F(Z)$ 重解析时，$G_1,G_2(H_1,H_2)$ 满足复变数的调和方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)F=0\qquad\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial w_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial w_2^2}\right)F=0\right).$$

我们称 $G_p,H_p,p=1,2$ 为复调和函数。而称 $G_2(z_1,z_2)$ 为 $G_1(z_1,z_2)$（$H_2(w_1,w_2)$为 $H_1(w_1,w_2)$）的共轭复调和函数.

当 Ω_{ζ_1} 和 Ω_{ζ_2} 都是单连区域时，称 Ω 为单连区域. 在单连区域 Ω 给定复调和函数，相差一个任意常数可唯一确定其共轭复调和函数.

定理 2.6　在单连区域 Ω，设 $f(Z)=f(z_1,z_2)$为 z_1,z_2 的二元解析复函数，且 $f(z_1,z_2)$ 满足复变数的调和方程，则存在在 Ω_{ζ_1} 解析的单元复函数 $\Phi_1(\zeta_1)$ 和在 Ω_{ζ_2} 解析的单元复函数 $\Phi_2(\zeta_2)$使

$$f(z_1,z_2)=\frac{\Phi_1(z_1+iz_2)+\Phi_2(z_1-iz_2)}{2}$$

证明　设 $f(Z)$ 的共轭复调和函数为 $g(Z)$，则 $F(Z)=f(Z)+jg(Z)$ 在 Ω 重解析，设 $F(Z)=e_1\Phi_1(\zeta_1)+e_2\Phi_2(\zeta_2)$，$\Phi_1(\zeta_1)$，$\Phi_2(\zeta_2)$分别是 ζ_1,ζ_2 的单元解析复函数，即知

$$f(z_1,z_2)=\frac{\Phi_1(z_1+iz_2)+\Phi_2(z_1-iz_2)}{2},\quad g(z_1,z_2)=\frac{\Phi_1(z_1+iz_2)-\Phi_2(z_1-iz_2)}{2i}.$$

证毕.

显然，若 F,F^* 重解析，则 $F\pm F^*$，FF^*，F/F^*（$\|F^*\|>0$），$F(F^*)$（F^* 的值域在 F 的定义域中）均为重解析函数.

定理 2.7　设 $F(Z)$ 在 Ω 重解析，已知

$$Z_1=e_1\zeta_1^{(1)}+e_2\zeta_2^{(1)},\quad Z_2=e_1\zeta_1^{(2)}+e_2\zeta_2^{(2)}$$

属于 Ω，又已知

$$F(Z_1)=e_1\Phi_1(\zeta_1^{(1)})+e_2\Phi(\zeta_2^{(1)}),\quad F(Z_2)=e_1\Phi(\zeta_1^{(2)})+e_2\Phi(\zeta_2^{(2)})$$

之值，则

$$Z=e_1\zeta_1^{(1)}+e_2\zeta_2^{(2)},\quad Z^*=e_1\zeta_1^{(2)}+e_2\zeta_2^{(1)}$$

属于 Ω，且唯一确定

$$F(Z)=e_1\Phi_1(\zeta_1^{(1)})+e_2\Phi_2(\zeta_2^{(2)})=e_1F(Z_1)+e_2F(Z_2),$$

$$F(Z^*)=e_1\Phi_1(\zeta_1^{(2)})+e_2\Phi_2(\zeta_2^{(1)})=e_1F(Z_2)+e_2F(Z_1)$$

之值.

§3　基本公式

一　Cauchy 定理和 Cauchy 公式

称曲线 C：$Z(t)=x_0(t)+ix_1(t)+jx_2(t)+kx_3(t)=e_1\zeta_1(t)+e_2\zeta_2(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 为有长（逐段光滑）简单曲线，如果 C_{ζ_1}：$\zeta_1=\zeta_1(t)$ 和 C_{ζ_2}：$\zeta_2=\zeta_2(t)$ 分别为 ζ_1，ζ_2 平面上的有长（逐段光滑）简单曲线。称 $Z=e_1\zeta_1+e_2\zeta_2$ 在闭曲线 C 内(外)，如果 ζ_1 在闭曲线 C_{ζ_1} 内(外)，同时 ζ_2 在闭曲线 C_{ζ_2} 内(外)。

设 $F(Z)$ 在 C 上连续，它沿 C 的积分

$$\int_C F(Z)\,dZ=e_1\int_{C_{\zeta_1}}\Phi_1(Z(t))\,d\zeta_1+e_2\int_{C_{\zeta_2}}\Phi(Z(t))\,d\zeta_2$$

定理 3.1　设 $F(Z)$ 在有长简单闭曲线 C 内的区域 Ω 重解析，且 $\Phi_1(\zeta_1)$，$\Phi_2(\zeta_2)$ 连续到边界，则

Ⅰ　$$\int_C F(Z)\,dZ=0$$

Ⅱ　$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{F(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}\,dZ=\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^n F(Z)}{\partial Z^n}\right|_{Z=Z_0}, & Z_0\text{ 在 }C\text{ 内},\\ 0, & Z_0\text{ 在 }C\text{ 外}\end{cases}\qquad (n=0,1,2\cdots).$$

Ⅲ　设 $Z_0,Z\in\Omega$，$\int_{Z_0}^{Z}F(Z)\,dZ=I(Z)$，这时 $I(Z)$ 在 Ω 重解析，且

$$\frac{\partial I(Z)}{\partial Z}=F(Z)$$

证　由定理 2.5 的(Ⅰ)，这里的公式和以后的许多公式可用统一的办法去处理。即先利用单元复变函数的结果，得出 $\Phi_1(\zeta_1)$，$\Phi_2(\zeta_2)$ 的有关公式，再转移为 $F(Z)$ 的结论。以Ⅱ为例：当 $Z_0\in\Omega$，知 $\Phi_1(\zeta_1)$，$\Phi_2(\zeta_2)$ 可导任意次，且

$$\Phi_1^{(n)}(\zeta_1^0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_{\zeta_1}}\frac{\Phi_1(\zeta_1)}{(\zeta_1-\zeta_1^0)^{n+1}}\,d\zeta_1,\quad \Phi_2^{(n)}(\zeta_2^0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_{\zeta_2}}\frac{\Phi_2(\zeta_2)}{(\zeta_2-\zeta_2^0)^{n+1}}\,d\zeta_2,$$

故 $F(Z)$ 可导任意次，且

$$F^{(n)}(Z_0)=e_1\Phi_1^{(n)}(\zeta_1^0)+e_2\Phi_2^{(n)}(\zeta_2^0)$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{e_1\Phi_1(\zeta_1)+e_2\Phi_2(\zeta_2)}{e_1(\zeta_1-\zeta_1^0)^{n+1}+e_2(\zeta_2-\zeta_2^0)^{n+1}}(e_1d_{\zeta_1}+e_2d_{\zeta_2})=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{F(Z)}{(Z-Z_0)^{n+1}}dZ.$$

Z_0 在 C 外证明相同。

二　函数的幂级数展开

当 $\Omega_{\zeta_1},\Omega_{\zeta_2}$ 均为圆域，ζ_1^0,ζ_2^0 分别为其圆心，R_1,R_2 分别为其半径，我们称 Ω 为双圆柱域，$Z_0=e_1\zeta_1^0+e_2\zeta_2^0$ 为其心，(R_1,R_2) 为其半径。

定理 3.2　设 $F(Z)$ 在以 Z_0 为心的双圆柱域 Ω 上半解析，则

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[e_1\frac{\partial^n\Phi_1}{\partial\zeta_1^n}\Big|_{\zeta_1=\zeta_1^0}+e_2\frac{\partial^n\Phi_2}{\partial\zeta_2^n}\Big|_{\zeta_2=\zeta_2^0}\right](Z-Z_0)^n;$$

如果 $F(Z)$ 在 Ω 解析，则

$$F(Z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}F}{\partial\zeta_1^m\partial\zeta_2^n}\Big|_{Z=Z_0}(\zeta_1-\zeta_1^0)^m(\zeta_2-\zeta_2^0)^n;$$

如果 $F(Z)$ 在 Ω 重解析，则

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^nF}{\partial Z^n}\Big|_{Z=Z_0}(Z-Z_0)^n.$$

三　初等函数

设 $Z=e_1\zeta_1+e_2\zeta_2$，我们定义

$$e^z=e_1e^{\zeta_1}+e_2e^{\zeta_2},\quad \sin Z=e_1\sin\zeta_1+e_2\sin\zeta_2,\quad \cos Z=e_1\cos\zeta_1+e_2\cos\zeta_2.$$

等。则它们都是重解析函数，它们有与复变函数里对应函数相仿的运算公式。易知

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}Z^n,$$

$$\sin Z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}Z^{2n+1}=\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{2i}=\frac{e^{jZ}-e^{-jZ}}{2j},$$

$$\cos Z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}Z^{2n}=\frac{e^{iZ}+e^{-iZ}}{2}=\frac{e^{jZ}+e^{-jZ}}{2},$$

等。

定理 3.3　设 $Z=e_1|\zeta_1|e^{i\theta_1}+e_2|\zeta_2|e^{i\theta_2}\in\mathscr{O}$，则

$$Z=|Z|e^{i\theta+j\varphi+k\psi}=|Z|(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+j\sin\varphi)(\mathrm{ch}\psi+k\,\mathrm{sh}\psi).$$

其中 $$\theta=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+m\pi,\quad \varphi=\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+n\pi\quad(m,n\text{ 同奇、偶。}),$$

$$\psi=\frac{1}{2}\ln\frac{|\zeta_2|}{|\zeta_1|}.$$

证 $$Z=e_1e^{\ln|\zeta_1|+i\theta_1}+e_2e^{\ln|\zeta_2|+i\theta_2}=e^{e_1(\ln|\zeta_1|+i\theta_1)+e_2(\ln|\zeta_2|+i\theta_2)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln|\zeta_1\zeta_2|+i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+j\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+k\frac{1}{2}\ln\frac{|\zeta_1|}{|\zeta_2|}}=|Z|e^{i\theta+j\varphi+k\Psi}.$$

易知：

$$z_1^2+z_2^2=|Z|^2e^{2i\theta},\ w_1^2+w_2^2=|Z|^2e^{2j\varphi},\ \xi_1^2+\xi_2^2=|Z|^2e^{2k\Psi}.$$

由于 $\mathscr{C}^2$ 中有 Dedekind 分解定理，而重解析函数又有充要条件 I，故单元解析复函数的很多结果可转移到重解析函数中来。而且重复数环还含有子环 $\{t+kx\}$，重解析函数的充要条件Ⅲ又显示它包括满足双曲方程的函数，这就给用复变函数方法去研究双曲方程开辟了道路。

编辑部注：由于本文过长，分两期登完，文献目录附在下半部末尾。

编辑部重要启事

一、本刊专题研究栏今后以刊登中、短篇创造性论文为主，凡不超过四个印刷面的短篇创作将尽可能考虑优先刊登。

二、长篇创造性论文只有在非常特殊的情况下才能获得发表的机会。当然综述性或评论性文章将不受限制，但也要珍惜篇幅。

三、本刊欢迎“研究简报”，但篇幅以不超过二至三页（印刷面）为限。凡超过篇幅限制者一律不予刊载。这类来稿须附寄论证细节作附件，稿件发表时附件将存档。

四、英文稿件要求间行打字，手写稿必须采用印刷体。英文行文质量由作者自己负责。凡不合要求者一律退稿自理。

五、凡一年内没有得到发表消息者，作者可向编辑部声明改投其它刊物。

六、本刊提供的论文抽印本带有封面，成本较高，因此在稿酬支付上一律采取低标准。

《数学研究与评论》编辑部

一九八三年三月二十日