第3卷 第2期
1983年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.2
Apr. 1983

不动点理论的新发展(一)续

张石生

(四川大学 数学系)

§5 关于压缩型映象的等价性问题

前面谈到的173类压缩型映象在不同的时期由不同的作者独立地引入和研究。现在我们自然要问它们之间有什么联系？

由前面的定义明显地看出下面的关系式成立：

i) $(m)\Rightarrow(16+m)\Rightarrow(32+m)$，$(16+m)\Rightarrow(48+m)\Rightarrow(64+m)$，$m=1,2,\cdots,16$.

ii) $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(7)\Rightarrow(14)$，$(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(8)$，$(4)\Rightarrow(6)$，$(10)\Rightarrow(15)$，$(11)\Rightarrow(12)\Rightarrow(13)\Rightarrow(15)$；

iii) (1)至(15)$\Rightarrow$(16)，(17)至(31)$\Rightarrow$(32)，(33)至(47)$\Rightarrow$(48)

关于这些映象间的更进一步的关系Rosenholtz, Janos, Rhoades及作者分别在[35]，[37]，[38]，[1]，[45]，[50]中讨论过。Rosenholtz证明，如(X,d)是一紧致度量空间，则在与d拓扑等价的度量意义下，第(3)类的压缩型映象与Banach压缩映象（即第(1)类映象）等价。

1976年Janos[37]证明，如(X,d)是一紧致度量空间，设T是$X\to X$的第(4)类的连续压缩型映象，则在与d拓扑等价的度量下，它与第(1)类映象等价。

1979年作者在[50]中证明，如果(X,d)是紧致度量空间，T是映X到X的连续映象，则在拓扑等价的度量意义下，第(1)，(3)，(4)，(11)类映象相互等价。

1981年作者在[45]中进一步证明了下面的结果：

定理1.16[45] 设(X,d)是一完备的度量空间，T是映X到X的连续映象，则在与d拓扑等价的度量意义下，下列26类压缩型映象是相互等价的：

(1),(2),(4),(5),(6),(7),(8),(10),(11),(12),(13),(14),(15)；

(17),(18),(20),(21),(22),(23),(24),(26),(27),(28),(29),(30),(31).

定理1.17[45] 设(X,d)，T之意义如前一定理，再设T是定理1.16中所述的26类中的任一类压缩型映象。则

i) T在X中存在唯一的不动点x_*；

ii) 对任一$x_0\in X$，迭代序列$\{T^nx_0\}$收检于x_*；

iii) 对任意的实数$c\in(0,1)$，存在一与d拓扑等价的度量d_*，使得T在度量d_*下是具

* 本文上半部见本刊第二卷第三期(1982).

Lip常数 c 的Banach压缩映象，而且序列$\{T^n x_0\}$收检于x_*有下之速率估计：

$$d_*(T^n x_0, x_*) \leqslant \frac{c^n}{1-c} d_*(T x_0, x_0);$$

iv）存在包含 x_*之一开邻域U，对任一包含 x_* 之开邻域 $V \subset X$，存在某一正整数 n_0，当 $n \geqslant n_0$时有 $T^n(U) \subset V$。

定理 1.18 [45]　设 (X,d)，T 满足定理 1.16 中的条件。再设下之一条件成立；

i）T 是紧致映象；

ii）(X,d) 是紧致度量空间。

则第(1)至第(32)类压缩型映象在与 d 拓扑等价的度量意义下是相互等价的。

如果再设 T 是(1)—(32)类中的任一类映象，则定理1.17的结论仍成立。

注 5　由定理 1.16—1.18表明在 T 是连续紧致映象的条件下，在拓扑等价的度量意义下，(1)—(32)类压缩型映象尽管名称不同，形式各异，但它们彼此是相互等价的，也就是说他们本质上是 Banach 型的压缩映象。

另外定理1.18顺便给出第(16)类压缩型映象存在不动点的一充分条件。

至于前述的 173 类映象间更深入的联系，则还需进一步研究。最近丁协平在[56]中证明了在 T 是连续的条件下，定理 1.16 中的 26 类映象在拓扑等价度量意义下，与 (162) 和 (173)类映象都是等价的。

§6　可交换的压缩型映象的公共不动点问题

关于可交换的压缩型映象，1976年 Jungck 最先在 [64] 中证明了下面的结果。

定理 1.19 [64]　设(X,d)是一完备的度量空间，设 S 和 T 是可交换的映 X 到 X 的连续映象，使得$T(X) \subset S(X)$，再设存在$\alpha \in (0,1)$，使得对每一$x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(Sx, Sy). \tag{174}$$

则 S 和 T 有唯一的公共不动点。

注 6　显然 Banach 不动点定理是定理1.19当$S=I$ 的特例。

1979年 Naik, Das 推广了上述结果，他证明了下之：

定理 1.20 [57]　设 S 是完备度量空间 (X, d) 上的连续自映象，T 是 X 上与 S 可交换的任一自映象。再设

$$T(X) \subset S(X),$$

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha \max\{d(Sx, Sy), d(Sx, Tx), d(Sy, Ty), d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\},$$

其中$\alpha \in (0,1)$，则 S 和 T 有唯一的公共不动点。

最近作者在[49](亦见[40])中证明了下列结果：

定理 1.21 [49]　设(X,d)是一完备的度量空间，f 是 X 上的自映象，使得对每一正整数 m，f^m 为连续，再设$\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$：$f^{m-1}(X) \to X$是一映象序列，满足条件

$$g_i(f^{m-1}(X)) \subset f^m(X),\quad i=1,2,\cdots.$$

设每一 g_i 都与 f 可交换，$i=1,2,\cdots$。又设存在一正整数序列 $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对任意的正整数 i,j 和任意的 $x,y\in f^{m-1}(X)$，

$$d(g_i^{m_i}(x),g_j^{m_j}(y))\leqslant\mathscr{A}(\max\{d(f(x),f(y)),d(f(x),g_i^{m_i}(x)),d(f(y),g_j^{m_j}(y)),$$
$$d(f(y),g_i^{m_i}(x)),d(f(x),g_j^{m_j}(y))\}),$$

其中 $\mathscr{A}(t)$ 为满足条件($\mathscr{A}$1)，($\mathscr{A}$2)；或($\mathscr{A}$1)，($\mathscr{A}$3)的函数：

($\mathscr{A}$1) $\mathscr{A}$：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是不减和右连续的。

($\mathscr{A}$2) 对任一实数 $q\in[0,\infty)$ 存在一数 $t(q)\in[0,\infty)$，使得

(a) $t(q)$ 是集合 $\{t\in[0,\infty)$：$t\leqslant q+\mathscr{A}(t)\}$ 的上界；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{A}^n(t(q))=0$。

($\mathscr{A}$3) 对每一 $t>0$，$\mathscr{A}(t)<t$，而且 $\lim\limits_{t\to\infty}(t-\mathscr{A}(t))=\infty$。则 f 和 g_i，$i=1,2,\cdots$ 有唯一公共不动点 $f(y_*)$，其中 y_* 是序列 $\{y_n=g_n^{m_n}(x_n)=f(x_{n+1})\}$ 的极限。

注 7 Das, Naik[57] 的定理 2.1, 3.1, 3.2 和 4.1，Ciric[20] 的定理 1.2，Jugck[64] 及 Rhoades [1] 的定理 23以及 Leader[58] 中的定理都是定理 1.21 的特例。

§7 关于多值的压缩型映象的不动点定理

近年来关于多值的压缩型映象的不动点定理，有不少人进行过讨论。我们在本节中扼要地介绍这方面的主要结果，为此我们先引进一些定义和符号。

设 (X,d) 是一个 Polish 空间，即一可分完备的度量空间。$C(X)$ 表 X 的一切非空紧子集的集合族，$CB(X)$ 表 X 的一切非空的有界闭集族，2^X 表 X 的一切子集的集合族。设 H 是 $CB(X)$ 上由度量 d 导出的 Hausdorff 度量，即对任意的集合 $A,B\in CB(X)$，

$$H(A,B)=\max\{\sup_{x\in A}d(x,B),\ \sup_{y\in B}d(y,A)\}$$

其中

$$d(x,C)=\inf_{y\in C}d(x,y),\quad C\in CB(X).$$

由 Hausdorff 度量的定义，易知下面的结论成立。

定理 1.22 [60] 设 $A,B\in CB(X)$，则对任给的 $\varepsilon>0$ 和元 $a\in A$，都存在一元 $b\in B$，使得

$$d(a,b)\leqslant H(A,B)+\varepsilon.$$

如果 $A,B\in C(X)$，则可选择 $b\in B$，使得 $d(a,b)\leqslant H(A,B)$。

定义 4 多值映象 F：$(X,d)\to(CB(X),H)$ 称为上半连续的，如果对每一开集 $U\subset X$，集合 $\{x\in X,F(x)\subseteq U\}$ 是开的。

易知，如果 X 是紧致度量空间，则 F：$X\to CB(X)$ 是上半连续的充分必要条件为：当 $x_n\to x$，$y_n\in F(x_n)$ 且 $y_n\to y$ 时就指出 $y\in F(x)$。

定义 5 设 F 是映 $X\to CB(X)$ 的多值映象，序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 称为是 F 在 $x_0\in X$ 的轨道，如果 $x_n\in F(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$。

定义 6 X 称为 x_0- 联合轨道完备的，如果在 x_0 的每一轨道的每一 Cauchy 列，在 X 中是收敛的。

关于多值的压缩型映象 Achari，Sharma，倪录群，姚景齐、赵汉章等人分别在[61]，[62]，[59]中证明了下述结果：

定理 1.23 [61]　设 (X,d) 是一完备的度量空间，设 F_i: $X\to C(X)$，$i=1,2,\cdots,m$ 是满足下列条件的映象：

$$H(F_ix,F_jy)\leqslant\alpha\max\{d(x,y),d(F_ix,x),d(F_jy,y)\frac{1}{2}[d(F_ix,y)+d(F_jy,x)]\}$$

$$\forall x,y\in X,\ i,j=1,2,\cdots,m,$$

其中 $0<\alpha<1$。则 $\{F_i\}_{i=1}^m$ 有一公共的不动点。

定理 1.24 [61]　设 (X,d) 是一紧致度量空间，且对每一 $\lambda\in\Lambda$（Λ 是一指标集），设 F_λ: $X\to CB(X)$ 是上半连续的，且满足

$$H(F_\lambda x,F_\mu y)\leqslant\alpha\max\{d(x,y),\ d(F_\lambda x,x),d(F_\mu y,y),\frac{1}{2}[d(F_\lambda x,y)+d(F_\mu y,x)]\}$$

$$\forall x,y\in X,\lambda,\mu\in\Lambda,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$。则 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有唯一公共不动点。

定理 1.25 [62]　设 F_i，$i=1,2$，是映 $X\to C(X)$ 的多值映象，设 X 对每一 $x_0\in X$ 都是 x_0- 联合轨道完备的，再设满足

$$H(F_1x,F_2y)\leqslant\Phi\{D(x,F_1x),D(y,F_2y),D(x,F_2y),D(y,F_1x),d(x,y)\}\ \forall x,y\in X,$$

其中函数 Φ 满足下面的条件：

i) Φ 是映 $[0,\infty)^5\to[0,\infty)$ 的连续函数，且对每一变量不减；

ii) $\Phi(t,t,a_1t,a_2t,t)<t$，$t>0$，$a_i=0,1,2$，且 $a_1+a_2=2$。

则 F_1,F_2 有一公共的不动点。

由定理1.25特别得知下面的结论成立：

推论 1.26 [62]　设 F 是映 $X\to C(X)$ 的多值映象，设 X 对每一 $x_0\in X$ 都是 x_0- 联合轨道完备的，再设下之条件成立：

$$H(Fx,Fy)\leqslant\Phi\{D(x,Fx),D(y,Fy),D(x,Fy),D(y,Fx),d(x,y)\}\quad\forall x,y\in X,$$

其中 Φ 满足定理1.25中的条件 i)，ii)．则 F 存在不动点。

定理 1.27 [59]　设 (X,d) 是完备的度量空间，设 T 是映 X 到 $C(X)$ 的多值映象，且满足条件

i) T 映 (X,d) 到 $(CB(X),H)$ 是连续的；

ii) 如果存在 $x_0\in X$，轨道 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$，$x_n\in T(x_{n-1}),n=1,2,\cdots$，有聚点 $Z\in X$；

iii) $H(Tx,Ty)<\max\{d(x,y),D(x,Tx),D(y,Ty),\frac{1}{2}[D(x,Ty)+D(y,Tx)]\}$

$$\forall x,y\in X,\ x\neq y.$$

则 Z 是 T 的不动点，即 $Z\in TZ$。

注 8　倪录群等的文章 [59]中的定理 1，Kita [63]中的定理，都是定理1.25的特例。

§8　关于压缩型映象不动点定理的应用问题

经典的 Banach 压缩型映象原理对近代数学许多分支的应用给我们树立了压缩型映象的不动点定理对一些实际问题应用的典范。但是如何卓有成效地应用前述那些更一般的压缩型映象的不动点理论和方法于某些实际问题，那还是一个值得深入探讨的重大问题。最近作者具体应用前述的某些结果研究随机分析中随机算子的不动点理论以及随机逼近问题(这将在本文第Ⅲ部分中介绍)(见[47,53])，和研究 Banach 空间中非线性 Volterra 积分方程和非线性 Volterra-Fredholm 型的积分方程解的存在性和唯一性问题。我们得出下之结果：

定理 1.28[51]　设X是一实 Banach 空间，设非线性 Volterra 积分方程

$$x(t)=x_0(t)+\int_0^t K(t,s,x(s))ds,\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{**}$$

中的函数$K(t,s,x)$满足条件

(K1)　$K(t,s,x)\in C([0,T]\times[0,T]\times X,X)$

(K2)　存在满足次之条件的函数$\varphi(t,s,u)$：

(φ1)　$\varphi(t,s,u)$是$[0,T]\times[0,T]\times[0,\ \infty)\to[0,\infty)$的非负实值函数，对$u$不减，当$u>0$时$\varphi(t,s,u)<u$，$\forall t\in[0,T]$。

(φ2)　$\lim\limits_{u\to\infty}(u-\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\varphi(t,s,u)ds)=\infty$，

使得对一切的$x,y\in X$，和一切的$s,t\in[0,T]$

$\|K(t,s,x)-K(t,s,y)\|\leqslant\varphi(t,s,\max\{\|x-y\|,\|x-Tx\|,\|y-Ty\|,\|x-Ty\|,\|y-Tx\|\})$，

这里算子T由下式定义：

$$Tx=x_0(t)+\int_0^t K(t,s,x)ds.$$

则对任意给定的函数$x_0(t)\in C([0,T];X)$，方程(**)在$C([0,T];X)$中存在唯一解，而且迭代序列

$$x_n(t)=x_0(t)+\int_0^t K(t,s,x_{n-1}(s))ds,\ \ n=1,2,\cdots$$

收敛于这一解。

定理 1.29[51]　设X是一 Banach 空间，设非线性 Volterra-Fredholm 积分方程

$$x(t)=x_0+\int_0^t K_1(t,s,x(s))ds+\int_0^T K_2(t,s,x(s))ds,\ \ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{***}$$

中的函数$K_i(t,s,x)$，$i=1,2$满足下面的条件：

(K_3)　$K_i(t,s,x)$，$i=1,2$是映$[0,T]\times B(x_0,r)\to X$的连续映象，这里$B(x_0,r)$表$C([0,T];X)$中以$x_0$为心，$r$为半径的闭球。

(K4)　存在满足下述条件的函数$\varphi_1(t,s,u)$，$\varphi_2(t,s,u)$；

(φ3)　$\varphi_i(t,s,u)$，$i=1,2$是定义在$[0,T]\times[0,T]\times[0,2r]$上的非负连续函数，对$u\in[0,2r]$不减且

$$T\cdot(\sup_{0<s,t<T}\{\varphi_1(t,s,2r)+\varphi_2(t,s,2r)\})\leqslant 2r<\infty.$$

($\varphi 4$) 次之方程只有零解

$$u(t)=\int_0^t\varphi_1(t,s,u(s))ds+\int_0^T\varphi_2(t,s,u(s))ds,$$

使得对一切的$x,y\in B(x_0,r)$

$$\|K_i(t,s,x)-K_i(t,s,y)\|\leqslant\varphi_i(t,s,\|x-y\|),\ i=1,2.$$

($K5$) $(M_1+M_2)T\leqslant r$

这里 $M_i=\max\limits_{\substack{0<s,t<T\\x\in B(x_0,r)}}\|K_i(t,s,x)\|,\ i=1,2.$

则对任意给定的函数 $x_0\in C([0,T];X)$，方程(***)在 $C([0,T];X)$中存在唯一解，而且迭代序列

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int_0^tK_1(t,s,x_n(s))ds+\int_0^TK_2(t,s,x_n(s))ds,\ n=0,1,2,\cdots.$$

$x_0(t)=x_0$，收敛于这一解.

最近作者又利用压缩型映象的不动点定理研究泛函微分方程及与之相关联的 Volterra 积分-微分方程得出某些结果(详见[39])。

§9 几个待解决的问题

目前关于压缩型映象不动点理论研究中除了前面谈到的问题外，还有一些未解决或未完全解决的问题值得我们今后进一步研究。

i) 第(16)类映象存在不动点的条件问题；

ii) 各类压缩型映象间的相互关系及等价性的问题；

iii) 设T是第(16)类映象，且连续，又对某一点$x_0\in X$，$\{T^nx_0\}$有一聚点，问T是否存在不动点？若答案是否定的，那么对X或对T应置以什么条件，才能保证T存在不动点.

iv) 设T是属于第(60)—(64)类或第(68)—(80)类中任一类压缩型映象，T是否存在不动点？对映象对或映象序列情况又是怎样的呢?

v) 压缩型映象不动点理论的应用问题。

参考文献

[1] Rhoades, B.E., *Trans. Math. Soc.* V. 226 (1977), 257-290.

[2] Fisher, B., *Proc. Amer. Math. Soc.* V. 75, No. 2 (1979), 321-325.

[3] Fisher, B., *Glasgow Math. T.* 21 (1980), 165-167.

[4] Pal, T. K., Maiti, M., *Pure Appl. Math. Soc.* 6 (1977), 17-20.

[5] Matkowski, J., *Proc. Amer. Marh. Soc.* V. 62, No. 2 (1977), 344-348.

[6] Kwapisz, M., *Nonlinear Analysis TMA*, 3 (3) (1979), 293-302.

[7] Singh, S. P., Meade, B. A., *Bull. Austral Math. Soc.* 16 (1977), 49-53.

[8] Walter, W., *Nonlinear Analysis TMA* 5 (1) (1981), 21-25.

[9] Browder, F. E., *Nonlinear Analysis TMA* 3 (5) (1979), 657-661.

[10] Bianchini, R. M. T., *Boll. Un. Mat. Ital.* 5 (1972), 103-108.

[11] Reich, S., *Canad. Math. Bull.* 14 (1971), 121-124.

[12] Reich, S., *Boll. Un. Mat. Ital.* 4 (4) (1971), 1-11.

[13] Roux, D., Socrdi, P., Atti Accad Naz. Lincei Rend cl Sci. *Fix. Mat. Natur.* (8) 52 (1972), 682-688.

[14] Sehgal, V. M., *J. London Math. Soc.* (2) 5 (1972), 571-576.

[15] Chatterjea, S. K., Acad. C. R. *Bulgare Sci.* 25 (1972), 727-730.

[16] Hardy, G. E., Rogers, T. D., *Canad. Math. Bull.* 16 (1973), 201-206.

[17] Zamfircscu, T., *Arch. Math.* (Basel) 23 (1972), 292-298.

[18] Edelstein, M., *J. London Math. Soc.* 37 (1962), 74-79.

[19] Ciric, L. B., *Publ. Inst. Math.* (Beograd) (N. S.) 12 (26) (1971), 19-26.

[20] Ciric, L. B., *Proc. Amer. Math. Soc.* 45 (1974), 267-273.

[21] Singh, S. P., *Yokahama Math. J.* 17 (1969), 61-64.

[22] Yen, C. L., *Tamkang J. Math.* 3(1972), 95-96.

[23] Gupta, V. K., Srivastava, P., *Yokahama Math. J.* 19 (1971), 91-95.

[24] Guseman, L. F., Jr., *Proc. Amer. Math. Soc.* 26 (1970), 615-618.

[25] Lee Cheng-ming, *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 226 (1977), 147-159.

[26] Bailey, D. F., *J. London Math. Soc.* 41 (1966), 101-106.

[27] Ray, B. K., Rhoades, B. E., *Pacific J. Math.* V. 71, No. 2 (1977), 517-520.

[28] Ray, B. K., *Nanta Math.* 7 (1974) 86-92.

[29] Kannan, R., *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 5 (1972), 26-42.

[30] Rus, I. A., Studia Univ. Babcs-Bolyai Ser. *Math. Mech.* 18 (1973), 31-33.

[31] Rakotch, E., *Proc. Amer. Math. Soc.* 13 (1962), 459-465.

[32] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, New York, 1955.

[33] Wong, C. S., *Pacific J. Math.* 48 (1973), 299-312.

[34] Kannan, R., *Amer. Math. Monthy*, 76 (1969), 405-408.

[35] Rosenholtz, I., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 53, No. 1 (1975), 213-218.

[36] Massa, S., *Boll. Un. Math. Ital*, (4) 7 (1973), 151-155.

[37] Janos, L., *Proc. Amer. Math. Soc.* V. 61, No. 1 (1976), 171-175.

[38] Janos, L., *Canad. Math. Bull.* V. 18 (5) (1975), 675-678.

[39] 张石生　关于一类抽象的泛函微分程及与之相联系的非线性 Volterra 积分-微分方程解的存在性定理，1981年全国第二次泛函微分方程学术交流会议论文．

[40] Shih-sen Chang, *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 83, No. 2 (1981), 645--652.

[41] 张石生，科学通报，第21卷，第 6 期(1976)，272—275．

[42] 张石生，四川大学学报，1975年，第 2 期，67—78．

[43] 张石生，四川大学学报，1980年，第 2 期，55—66．

[44] 张石生，数学汇刊，1981年，第 2 期．

[45] 张石生，四川大学学报，1981年，第 1 期，45—67．

[46] 张石生，数学汇刊，1980年，第1期，57—66.
[47] Chang, Shih-sen *Nonlinear Analysis* V. 5, No. 2 (1981), 113-122.
[48] 张石生，陈绍仲，数学年刊，1981年，第4期，437—443.
[49] Chang, Shih-sen *Math. Japonica*, V. 26 No. 1, 1981.
[50] 张石生，四川大学学报，1979年，第4期，29—37.
[51] 张石生，数学汇刊，1981年，第1期，44—54.
[52] 张石生，四川大学学报，1981年，第3期，31—45.
[53] 张石生，陈绍仲，应用数学学报，1982年，第五卷，第三期，300—309.
[54] 张石生，丁协平，科学通报，数理化专辑，1980年，57—61.
[55] 丁协平，数学学报，第24卷，第1期(1981)，69—83.
[56] 丁协平，四川师范学院学报，数学专辑，1981年，130—142.
[57] Das, K. M., Vieswanatha Naik, K., *Proc. Amer. Math. Soc.* 77 (1979), 369-374.
[58] Leader, S., *Math. Japonica*, 24, No. 1 (1979), 17-24.
[59] 倪录群，姚景齐，赵汉章，数学年刊，第1卷，第1期，1980年，63—74.
[60] Nadler, S. B., *Pacific J. Math.* 30 (1969), 475-488.
[61] Achari, J., *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* V. 24, No. 2 (1979), 179-182.
[62] Sharma, A. K. L'Academie, Polon. des Seiences, *Série des Sciences Math.* V. 27, No. 5(1979), 407-412.
[63] Kita, T., *Math. Japonica*, 22, No. 1, (1977), 113-116.
[64] Jungck, G., *Amer. Math. Monthly*, 83 (1976), 261-263.

［附注］ 承蒙丁协平同志给我指出本文上半部中的问题，非常感谢。今将定理1.13改述如下：

定理1.13[44] 设 $(\mathscr{S},d)$ 是一完备的度量空间，T 是映 X 到 X 的连续映象。设对每一 $x\in X$，存在一与之相应的正整数 $p(x)$，使得

(171) $$\delta\left(O_T(x,p(x),\infty)\right)\leqslant\Phi\left(\delta\left(O_T(x,0,\infty)\right)\right),$$

其中 Φ 是满足下面二条件的函数

(Φ1) $\Phi(t)$：$[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 对 t 是不减的和右连续的，而且对一切 $t>0$ 有 $\Phi(t)<t$.

再设存在 $x_0\in X$，使得 $\delta\left(O_T(x_0,0,\infty)\right)<\infty$（代替原来的($\Phi$2)），则迭代序列 $\{x_n=T^n x_0\}$ 收敛于 T 的不动点。

这样改正后，并不影响下面的定理。

作者 1983年2月8日