第3卷 第2期 数学研究与评论 Vol.3 No.2
1983年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1983

从 Carnap-Bass-Horn 定理谈起

高恒珊

（北京，中国科技大学研究生院）

所谓 Carnap-Bass-Horn 定理系指如下定理：

定理A 对每个正整数 n，具有 n 个自由生成元的自由一目 Boole 代数（即 monadic Boolean algebras，以下简称一目代数）所含元素数目有限，其精确表达式为 $2^{[2^n \cdot 2^{(2^n-1)}]}$。

由于 S5 代数和一目代数两概念完全相合（见文末说明），上述定理等价于次之

定理B 对于每一正整数 n，具有 n 个自由生成元之自由 S5 代数所含元素数目有限，其精确表达式为 $2^{[2^n \cdot 2^{(2^n-1)}]}$。

又因模态系统 S5 的只含 n 个命题变元的子系统 $\mathfrak{S}_n$ 的 Lindenbaum-Tarski代数 $\mathscr{L}_n$ 就是具有 n 个自由生成元的自由 S5 代数[1)]，再根据在文[2]和[2]中引进的（广义）模态函数[2)]的定义知，上述两定理又等价于次之

定理C 模态系统 S5 中的由 n 个命题变元 $p_1, \cdots, p_n$ 所决定的全部（广义）模态函数数目有限，其精确表达式为 $2^{[2^n \cdot 2^{(2^n-1)}]}$。

定理 A 首先系由 H. Bass 在文[1]中证明的。Bass 的证明繁琐而且冗长，还涉及好些拓扑概念和推理，从而远不是纯代数的。关于此定理的“有限性”部分笔者曾在[3]中给出过一个简单的证明。在[4]中笔者指出，Bass 的定理早在 1946 年已由 R. Carnap 在文[2]中得到，而且 Carnap 的证明比起 Bass 的要简单得多。应当指出，Carnap 直接证明的是定理 C，但如前面所指出的，该定理等价于定理 A 和 B。

D. Monk 在其为《Mathematical Review（数学评论）》所写的对笔者文[4]的评论[8]中除指出 Carnap[2]中的证明比起 Halmos 在Bass之后于[5a]中给出的定理 A 的另一证明仍旧简单得多之外，还指出 Carnap 的证明可以用简单的代数语言表达出来。我们在此指出，A. Horn 在最近发表的文[6]中以不足三页的篇幅自足地论证了定理 B。他的证明可以说是纯代数的，而且论证的思想和 Carnap 的比较相近。这就实现了 Monk 在评论[8]中指出的可能性。至此我们便得到了 Carnap-Bass-Horn 定理的一个极其简单而且纯代数的证明。

如果说 Bass 和 Halmos 不知道 Carnap 十多年前的工作而更加繁琐地重复证明本质上

1)参看笔者文[4]。

2)即 W.P.Parry 意义下的模态函数参看文[2]第47页上的足注11。

*1982年10月18日收到。

是同一结果，那么Horn在文[6]中则是在完全不知道Carnap, Bass, Halmos的工作以及笔者的注记[4]的情况下重复得到同一结果。当然不同之处在于Horn的论证如上所说，是极为简单且是纯代数的。这种由好几个作者多次重复论证同一结果的现象固然从一个侧面反映了上述三合一的定理的重要性，但不也正好说明随着文献数量的日益急剧增长，方向相近甚至相同的科学工作者之间的学术交流亦已变得更加困难和不充分了吗？

无独有偶，正如杨安洲同志最近在文[10]中指示的那样，蔺大正同志在文[7a]中把早在廿年前即已由笔者解决了的一个问题(即1960年出版的S, M. Ulam的《A Collection of Mathematical Problems》一书第32页上的关于Peano映射的一个问题）又一次作出，也未提及前人的工作。应当指出，在笔者的文章1964年在《数学进展》上发表后，罗马尼亚学者S. Berti等又于1966年在文[1a]中得出同一结果；陆尚强同志在1979年也在《关于Peano映射的一个问题》一文中再次解决了同一问题，不过据笔者所知，该文迄未发表。若论及证明之长短，优劣，则笔者不揣冒昧地指出，笔者在文[4a]中作出的证明，在精练和集中上均强于上述三文。遗憾的是文[4a]和[1a]在杨的文[10]中均未曾提及。

最后就上面提到的S5代数和一目代数两概念的相合性作如下的说明：关于Lewis的模态系统S5同古典一目谓词演算的密切关系最早是在1933年由Wajsberg在文[9]中指出的。Halmos在[5]中从古典一目谓词演算的Lindenbaum-Tarski代数出发抽象地提出一目Boole代数的概念；而在[3]，特别是[6]中提到的S5代数（即Sε代数）则正好是由S5的Lindenbaum-Tarski代数出发抽象地引进的。根据Wajsberg的发现，这两个L-T代数应是同构的，从而一目代数与S5代数是完全相合的概念。

参考文献

[1] Bass, H., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 258—268.

[1a] Berti, S. et Ioanoviciu, A., *Rovue Roumaine de Math. Pures et Appl.*, 11(1966), 869—873.

[2] Carnap, R., *J. Symbolic Lcgic*, 11 (1946), 33—64.

[3] 高恒珊，数学进展，6 (1963), 92—95.

[4] Gao Heng-shan(高恒珊), *Scientia Senica*(中国科学), 13(1964), 1005,

[4a] ——————, *Ibid*, 1005—1006.

[5] Halmos, P., *Compositio Math.*, 12 (1955), 217—249.

[5a] —————, *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959)219—227.

[6] Horn, A., Notre *dame J. of Formal logic*, 19 (1978), 189—191.

[7] Hughes, G. E. & M. J. Cresswell, An Introduction to Modal Logic, 1968.

[7a] 蔺大正，数学研究与评论，2(1982)，第1期，23—24.

[8] Monk D., *Math. Review*, 30 (1965)* 4704.

[9] Wajsberg, M., *Monat. für Math.* Phys., 40 (1933), 113—126.

[10] 杨安洲，数学研究与评论，2(1982)，第2期，第86页，