第3卷 第3期
1983年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.3
July, 1983

关于Γ-环的稠密性定理*

徐忠明

(浙江丝绸工学院)

T. S. Ravisankar 和 U. S. Shukla 等人[1,2]用不同的方法刻划了 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 的 Jacobson 根 $J(\mathfrak{A})$，并得到了 Γ-环 $\mathfrak{A}/J(\mathfrak{A})$ 是半单的；任意半单 Γ-环就是本原 Γ-环的亚直和；任意半单右 Artin Γ-环就是有限个单右 Artin Γ-环的亚直和。本文建立 Γ-环的模同态并利用它给出本原 Γ-环的结构，把结合环中 Jacobson-Chevalley 的稠密定理推广到 Γ-环；最后还应用它导出单右 Artin Γ-环的某些性质。

一 预备知识

设 $\mathfrak{A}$ 与 Γ 是两个 Abel 加群，如果有一个合成 $\mathfrak{A}\times\Gamma\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$（简记 $(x,\alpha,y)=x\alpha y$）且满足：

1） $(x+y)\alpha z=x\alpha z+y\alpha z$，$x(\alpha+\beta)y=x\alpha y+x\beta y$，$x\alpha(y+z)=x\alpha y+x\alpha z$，

2） $(x\alpha y)\beta z=x\alpha(y\beta z)$，$\forall x,y,z\in\mathfrak{A},\alpha,\beta\in\Gamma$，

则称 $\mathfrak{A}$ 是一个 Γ-环。Γ-环的一个子加群 I，如果满足 $I\Gamma\mathfrak{A}\subseteq I$，则称 I 是 $\mathfrak{A}$ 的右理想，对左理想与（双边）理想可类似定义。如果 I 是 $\mathfrak{A}$ 的理想，则 $\overline{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}/I=\{\bar{a}=a+I|a\in\mathfrak{A}\}$ 关于运算 $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$, $\bar{a}\alpha\bar{b}=\overline{a\alpha b}$, $\forall a,b\in\mathfrak{A},\alpha\in\Gamma$ 仍是一个 Γ-环，称为 $\mathfrak{A}$ 关于（理想）I 的商 Γ-环。

设 $\mathfrak{A}$ 是 Γ-环，由 $\Gamma\times\mathfrak{A}$ 生成的自由 Abel 加群，记为 F，则 F 的子集

$$A=\{\sum_i n_i(\alpha_i,x_i)\in F\,|\,a\in\mathfrak{A}\text{ 蕴含 }\sum_i a\alpha_i x_i=0\}$$

（其中 n_i 是整数，$\sum_i$ 指对 i 的有限和）是 F 的子群。用 $[\alpha,x]$ 表示商群 $R=F/A$ 中的元素 $(\alpha,x)+A$，并在其中规定

$$\sum_i[\alpha_i,x_i]\cdot\sum_j[\beta_j,y_j]=\sum_{i,j}[\alpha_i,x_i\alpha_j y_j],$$

则 R 成为（通常的）结合环；又若定义合成 $\mathfrak{A}\times R\to\mathfrak{A}$：$a\sum_i[\alpha_i,x_i]=\sum_i a\alpha_i x_i$，$\forall a\in\mathfrak{A}$，$\sum_i[\alpha_i,x_i]\in R$，则 $\mathfrak{A}$ 是 R-模*)，记为 $\mathfrak{A}_R$，故把 R 称为 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 的右算子环。设 A 与 Ω 分别是 $\mathfrak{A}$ 与 Γ 的子集，置 $[\Omega,A]=\{\sum_i[\omega_i,a_i]\in R\,|\,\omega_i\in\Omega,a_i\in A\}$，特别 $R=[\Gamma,\mathfrak{A}]$。

*1981年10月25日收到。此文曾在全国第一次代数学学术交流会上宣读。

*) “R-模”指R-右模。下同。

如果对 Abel 加群M与Γ-环$\mathfrak{A}$有合成$M\times\Gamma\times\mathfrak{A}\to M$(简记$(m,\alpha,x)=m\alpha x$)且满足:

1) $(m_1+m_2)\alpha x=m_1\alpha x+m_2\alpha x$, $m(\alpha+\beta)x=m\alpha x+m\beta x$, $m\alpha(x+y)=m\alpha x+m\alpha y$,

2) $(m\alpha x)\beta y=m\alpha(x\beta y)$, $\forall m,m_1,m_2\in M,\alpha,\beta\in\Gamma,x,y\in\mathfrak{A}$,

则称M是Γ-环$\mathfrak{A}$的模，记为$M_{\mathfrak{A}}$。加群$\mathfrak{A}$本身也是Γ-环$\mathfrak{A}$的模,记为$\mathfrak{A}_{\mathfrak{A}}$。设$M$与$M'$是$\Gamma$-环$\mathfrak{A}$的两个模，如果在模$M_{\mathfrak{A}}$到模$M'_{\mathfrak{A}}$之间有一个$M$到$M'$的群同态$\varphi$且满足$(m\alpha x)\varphi=(m\varphi)\alpha x,\forall m\in M,\alpha\in\Gamma,x\in\mathfrak{A}$，则说$\varphi$是$M_{\mathfrak{A}}$到$M'_{\mathfrak{A}}$的一个同态；若$\varphi$又是1—1的，则说$\varphi$是一个同构。$M_{\mathfrak{A}}$到$M'_{\mathfrak{A}}$的所有同态所成的集合记为$\mathrm{Hom}_{(\Gamma,\mathfrak{A})}(M,M')$。

模$M_{\mathfrak{A}}$称为是既约的，如果$M\Gamma\mathfrak{A}\neq(0)$且$M_{\mathfrak{A}}$没有非平凡的真子模。模$M_{\mathfrak{A}}$称为是忠实的，如果$M_{\mathfrak{A}}$在$\mathfrak{A}$中的零化子$A_{\mathfrak{A}}(M)=\{x\in\mathfrak{A}\mid M\Gamma x=(0)\}=(0)$。显见$A_{\mathfrak{A}}(M)$是$\Gamma$-环$\mathfrak{A}$的(双边)理想且$M$对$\Gamma$-环$\mathfrak{A}/A_{\mathfrak{A}}(M)$是忠实的。于是当$M_{\mathfrak{A}}$是既约时，则$M$是$\Gamma$-环$\mathfrak{A}/A_{\mathfrak{A}}(M)$的忠实既约模。如果$\Gamma$-环$\mathfrak{A}$有忠实既约模，则称$\mathfrak{A}$是本原的。

设R是Γ-环$\mathfrak{A}$的右算子环，如果M是R-模，规定:

$$m\alpha x=m[\alpha,x],\quad\forall m\in M,\alpha\in\Gamma,x\in\mathfrak{A},\tag{1}$$

则M就变成Γ-环$\mathfrak{A}$的模$M_{\mathfrak{A}}$；如果M是Γ-环$\mathfrak{A}$的既约模，即$M_{\mathfrak{A}}$是既约的，规定

$$m\sum_i[\alpha_i,x_i]=\sum_i m\alpha_i x_i,\quad\forall m\in M,\quad\sum_i[\alpha_i,x_i]\in R.\tag{2}$$

(显见该等式与$\sum_i[\alpha_i,x_i]$中代表元选取无关)，这样就把M变成了R-模，记为M_R。有

引理1.1[1,2] 下述命题等价:

1) $M_{\mathfrak{A}}$是既约的，2) M_R是既约的，

3) $m\in M\setminus(0)$，蕴含$\exists\alpha\in\Gamma$，使得$m\alpha\mathfrak{A}=M$。

引理1.2[2] Γ-环$\mathfrak{A}$是本原的当且仅当它的右算子环R是本原的且$A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$。

引理1.3 设R是本原Γ-环$\mathfrak{A}$的右算子环，则$M_{\mathfrak{A}}$是忠实既约的当且仅当M_R是忠实既约的。

证明 设$M_{\mathfrak{A}}$是忠实既约的，在(2)的规定下,由引理1.1, M_R是既约的。设$r=\sum_i[\alpha_i,x_i]\in R$，使得$M_r=M\sum_i[\alpha_i,x_i]=(0)$，即$\sum_i M\alpha_i x_i=(0)$。因$M\Gamma\mathfrak{A}=M$,故$M\Gamma(\sum_i\mathfrak{A}\alpha_i x_i)=(0)$。由$M_{\mathfrak{A}}$的忠实性，得$\sum_i\mathfrak{A}\alpha_i x_i=(0)$或$\mathfrak{A}r=(0)$。再利用$R$的定义得$r=0$。故$M_R$是忠实的。从而$M_R$是忠实既约的。

反之，设M_R是忠实既约的，在(1)的规定下，由引理1.1,知$M_{\mathfrak{A}}$是既约的,设$x\in\mathfrak{A}$，使$M\Gamma x=(0)$，即$M[\Gamma,x]=(0)$。由M_R的忠实性，得$[\Gamma,x]=(0)$且$\mathfrak{A}\Gamma x=(0)$。由引理1.2，即得$x=0$，从而$M_{\mathfrak{A}}$是忠实既约的。

二 本原Γ-环

如果M是Γ-环$\mathfrak{A}$的既约模，则对任意自然数n及任意的$a_i\in\mathfrak{A},\alpha_i\in\Gamma,i=1,2,\cdots,n$，我们定义映射:

$$T_{\sum_i[\alpha_i,a_i]}:\ m\longmapsto\sum_i m\alpha_i a_i,\quad\forall m\in M.\tag{3}$$

即$mT_{\sum_i[\alpha_i,a_i]}=\sum_i m\alpha_i a_i$。显见$T_{\sum_i[\alpha_i,a_i]}$是属于加群$M$的自同态环$\mathrm{End}(M)$。利用(2)，

$mT_{\sum[\alpha_i,a_i]_i}=m\sum_i[\alpha_i,a_i]$，即可把同态(3)看作对既约模 M_R 定义的同态。反之也同样。

众所周知，对结合环 R 及 R-模 M 有：1)当 M_R 是忠实时，可把 R 看作是 $\mathrm{End}(M)$ 的子环，2)当 M_R 是既约时，$\mathrm{End}_R(M)$ 是除环(Schur 引理)。因

$$\mathrm{End}_R(M)=\{\psi\in\mathrm{End}(M)\mid\sum_i[\alpha_i,a_i]\cdot\psi=\psi\cdot\sum_i[\alpha_i,a_i],\ \forall\sum_i[\alpha_i,a_i]\in R\}$$
$$=\{\psi\in\mathrm{End}(M)\mid T_{\sum[\alpha_i a_i]}\cdot\psi=\psi\cdot\sum_i[\alpha_i,a_i],\ \forall\alpha_i\in\Gamma,a_i\in\mathfrak{A}\}.$$

表明 ψ 不仅是 M_R 的自同态，而且又是 $M_{\mathfrak{A}}$ 的自同态。为了记法统一起见，把 $\mathrm{End}_R(M)$ 记为 $\mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$。于是利用引理1.1，有

引理2.1 若 M 是既约的 $\mathfrak{A}\Gamma$-模，则 $\mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$ 是除环。

同环论中一样，Γ-环 $\mathfrak{A}$ 的既约模 M 便是除环 $\mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$ 上的右向量空间，并把它改造为左向量空间，为此引进与 $\mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$ 反同构的 D（当然也是除环）。令 φ 是 D 到 $\mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$ 的反同构，规定

$$dm=m(d\varphi),\ d\in D,\ m\in M.$$

于是 D-左向量空间 M 与 $M_{\mathfrak{A}}$ 有如下关系：

$M_{\mathfrak{A}}$ 的任意自同态都可由 D 中的任意元素左乘来实现，且

$$d(m\alpha a)=(dm)\alpha a,\ m\in M,\ \alpha\in\Gamma,\ a\in\mathfrak{A},\ d\in D.$$

此时，$R\subseteq\mathrm{End}_D(M)$。称 $\mathrm{End}_D(M)$ 为该向量空间的全线性变换环。

定义2.1 设 M 是除环 D 上的左向量空间，Γ-环 $\mathfrak{A}$ 的右算子环 R 能自然地嵌入全线性变换环 $\mathrm{End}_D(M)$。如果对任意自然数 n 及 M 中任意两个元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，且 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是 D-线性无关的，都有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k\in\Gamma$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in\mathfrak{A}$，使得

$$\sum_{j=1}^{k}x_i\alpha_ja_j=y_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则称 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 是 M 上稠密线性变换 Γ-环或简称为稠密 Γ-环 $\mathfrak{A}$。

定理2.1 设 $\mathfrak{A}$ 是本原 Γ-环，$M_{\mathfrak{A}}$ 是它的忠实既约模，则 $\mathfrak{A}$ 是 D 上左向量空间 M 的稠密线性变换 Γ-环。

证明 由引理1.3，$\mathfrak{A}$ 的右算子环 R 是本原且 M_R 是忠实既约的。据[3]的定理7.3.1，对题设中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，存在 $r\in R$，使得 $x_ir=y_i,i=1,2,\cdots,n$，因 $r\in R$，而 r 可写为 $r=\sum_{j=1}^{k}[\alpha_j,a_j],\alpha_j\in\Gamma,a_j\in\mathfrak{A},j=1,2,\cdots,k$，其中 k 为某一正整数。于是有

$$\sum_{j=1}^{k}x_i\alpha_ja_j=y_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

即 $\mathfrak{A}$ 是稠密 Γ-环。

众所周知，环 R 是本原的充要条件为 R 是稠密的[3,5]。再由引理2，推得

推论1 若 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$，则 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 是本原的当且仅当 $\mathfrak{A}$ 是稠密的。

推论2 设 $\mathfrak{A}$ 是本原 Γ-环，则有除环 D，或有某正整数 n，使得它的右算子环 $R\cong D_n$，或对任意正整数 k，都有 R 的子环 R_k 同态于 D_k，其中 D_i 是 D 上 i 阶全矩阵环。

三　对右 Artin Γ-环的应用

定理3.1 设 R 是右 Artin Γ-环 $\mathfrak{A}$ 的右算子环，则下述命题等价：

1) $\mathfrak{A}$ 是本原 Γ-环，2) $\mathfrak{A}$ 是单 Γ-环，3) $\mathfrak{A}$ 是素 Γ-环，

4) $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$ 且 $R\cong D_n$，其中 n 为某正整数，D_n 为某除环 D 上的 n 阶全阵环。

证明 1)至3)的等价见[6]的定理3.6及[1]的定理1.6.

1)⇒4) 由稠密性定理知，本原环 R 可看作 $\mathrm{End}_D(M)$ 的稠密子环，其中 M 是某除环 D 上的左向量空间。今证 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin Γ-环时，M 必是有限维的。若不然，则 M 是无限维的，故可取可数无限多个 D-线性无关元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$。记由 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 所生成的子空间为 M_k 及

$$T_k=(o:M_k)=\{x\in\mathfrak{A}\mid M_k\Gamma x=(0)\},\quad k=1,2,\cdots,$$

则 T_k 是 $\mathfrak{A}$ 的右理想且降链 $T_1\supseteq T_2\supseteq\cdots\supseteq T_n\supseteq\cdots$. 又由 $\mathfrak{A}$ 的稠密性，故必有 $\alpha_i\in\Gamma,a_i\in\mathfrak{A}$，$i=1,\cdots,k_o$，使得 $a_i\in T_i$，$i=1,2,\cdots,k_o$，而 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{k_o}\}\not\subset T_{k+1}$。因之有 $\mathfrak{A}$ 的右理想严格降链

$$T_1\supsetneqq T_2\supsetneqq\cdots\supsetneqq T_n\supsetneqq\cdots.$$

这与 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin Γ-环相矛盾。这就显示 M 是有限维的. 此时 $R\subseteq\mathrm{End}_D(M)\cong D_n$。再由 R 的稠密性，便得 $R=\mathrm{End}_D(M)\cong D_n$。又由引理1.2，有 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$。

4)⇒2) 设 $R\cong D_n$，则 $R=[\Gamma,\mathfrak{A}]$ 有单位元且是单环，取 I 是 $\mathfrak{A}$ 的非零理想，则由 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$ 得 $\mathfrak{A}\Gamma I\neq(0)$. 于是 $[\Gamma,I]\neq(0)$. 因 $R[\Gamma,I]=[\Gamma,\mathfrak{A}][\Gamma,I]=[\Gamma,\mathfrak{A}\Gamma I]\subseteq[\Gamma,I]$，与 $[\Gamma,I]R\subseteq[\Gamma,I]$，故 $[\Gamma,I]$ 是 R 的非零理想. 从而 $[\Gamma,I]=R$（因 R 是单环）。把 $\mathfrak{A}$ 看作 R-模且 R 有单位元，则 $\mathfrak{A}R=\mathfrak{A}$，即 $\mathfrak{A}\Gamma\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$；又 $\mathfrak{A}\Gamma\mathfrak{A}=\mathfrak{A}R=\mathfrak{A}[\Gamma,I]=\mathfrak{A}\Gamma I\subseteq I$，于是 $I=\mathfrak{A}$，即 $\mathfrak{A}$ 是单 Γ-环。

定理3.2 设 R 是 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 的右算子环，Γ-环 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin 且单的当且仅当 R 是右 Artin、单且 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$ 的。

证明 ⇒：因除环 D 上的 n 阶全阵环 D_n 是单且右 Artin 的，故由上述定理，R 是右 Artin、单且 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$。

⇐：假定 R 是右 Artin、单且 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$。由 Wedderburn-Artin 定理，$R\cong D_n$（$D_n$ 是某除环 D 上的 n 阶全阵环）。如果能证明 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin 的，则由上述定理，知 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin 单 Γ-环。下面证 $\mathfrak{A}$ 的右 Artin 性。

任取 $\mathfrak{A}$ 的右理想降链

$$\mathfrak{A}_1\supseteq\mathfrak{A}_2\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{A}_n\supseteq\cdots,$$

则 $[\Gamma,\mathfrak{A}_1]\supseteq[\Gamma,\mathfrak{A}_2]\supseteq\cdots\supseteq[\Gamma,\mathfrak{A}_n]\supseteq\cdots$ 是 R 的右理想降链。由 R 的右 Artin 性，存在某一自然数 n，使得 $[\Gamma,\mathfrak{A}_n]=[\Gamma,\mathfrak{A}_{n+k}]$，$k=1,2,\cdots$。于是 $\mathfrak{A}\Gamma\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}\Gamma\mathfrak{A}_{n+k}$，即 $\mathfrak{A}\Gamma(\mathfrak{A}_n-\mathfrak{A}_{n+k})=(0)$。因 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})=(0)$，故 $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_{n+k}$，$k=1,2,\cdots$，即 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin 的。

J. S. Ravisankar 与 U. S. Shukla 证实了 Γ-环 $\mathfrak{A}$ 是右 Artin 且半单的充要条件为 $\mathfrak{A}$ 是有限个单右 Artin Γ-环的直和（[1]的定理2.15）。而定理3.2又把单右 Artin Γ-环 $\mathfrak{A}$ 归结为 $\mathfrak{A}$ 是某除环 D 上的 n 阶全阵环 D_n（D_n 同构于它的右算子环 R）上的忠实模。

参 考 文 献

[1] Ravisankar, T. S. & Shukla, U. S., Stucture of Γ-rings, Pacific *J. Math.*, Vol. 80, №. 2(1979), 537—559.

[2] Kyuno, S., On the semi-simple Gamma rings, *Tohoku Math. J.*, 29(1977), 217—225.

[3] 刘绍学，环与代数，北师大讲义，1978.

[4] Jacobson, N., Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. xxxvii(1956).

[5] Herstein, I. N., Non commutative rings, Carus Math. Monographs.

[6] Luh, J., On the theory of simple Γ-rings, *Michigam Math. J.*, 16(1969), 65—75,

The Density Theorem of the Γ-ring.

Xu Zhongming.

Abstract

Let $\mathfrak{A}$ be an Γ-ring and M be an irreducible $\mathfrak{A}\Gamma$-module, for $a \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \Gamma$, we define $T_{[\alpha,a]}$: M→M by $m\,T_{[\alpha,a]} = m\alpha a$ for all $m \in M$. Let End(M) be the ring of all endomorphisms of the additive group of M. We define as usual $\mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M) \equiv \{\psi \in \mathrm{End}(M) \mid T_{\sum_i [\alpha_i,a_i]}\psi = \psi T_{\sum_i [\alpha_i,a_i]}$ all $a_i \in \mathfrak{A}, \alpha_i \in \Gamma\}$.

In this paper the following results are obtained.

Theorem 1 If M be an irreducible $\mathfrak{A}\Gamma$-module, then its ring of endomorphisms $D = \mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$ is a division ring.

Definition 1 A Γ-ring $\mathfrak{A}$ is said to act densely on M (or $\mathfrak{A}$ is said to be dense on M), if for every n and $x_1, \cdots, x_n$ in M which are linearly independent over D and any n elements $y_1, \cdots, y_n$ in M, there are elements $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ in Γ and $a_1, \cdots, a_k$ in $\mathfrak{A}$ such that $y_i = \sum_{j=1}^{k} x_i \alpha_j a_j$ for $i = 1, \cdots, n$,

Theorem 2 Let $\mathfrak{A}$ be a primitive Γ-ring and let M be a faithful irreducible $\mathfrak{A}\Gamma$-module. If $D = \mathrm{End}_{[\Gamma,\mathfrak{A}]}(M)$, then $\mathfrak{A}$ is a dense Γ-ring of linear transformations on M over D.

Theorem 3 $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) \equiv \{x \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}\Gamma x = (0)\}$ of the Γ-ring $\mathfrak{A}$ is (0), then $\mathfrak{A}$ is primitive if and only if it is dense.

Theorem 4 Let R be the right operator ring of a primitive Γ-ring $\mathfrak{A}$. Then for some division ring D, either R is isomorphic to D_n, the ring of all $n \times n$ matrices

over D, or, for any integer k there exists a subring R_k of R which maps homomorphically onto D_k.

Theorem 5 Let R be the right operator ring of a simple right Artinian Γ-ring $\mathfrak{A}$. Then following conditions are equivalent mutually:

(1) $\mathfrak{A}$ is a primitive Γ-ring, (2) $\mathfrak{A}$ is a simple Γ-ring, (3) $\mathfrak{A}$ is a prime Γ-ring,

(4) $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) = (0)$ and $R \cong D_n$ for some n, where D_n is the ring of all $n \times n$ matrices over some divison ring D.

Theorem 6 If R is the right operator ring of a Γ-ring $\mathfrak{A}$, then Γ-ring $\mathfrak{A}$ is a simple and right Artinian if and only if R is a simple, right Artinian and $A_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ $=\{x \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}\Gamma x = (0)\} = (0)$.