"抛球悖论"何悖之有

张义杰

"数学研究与评论"1982年第3期第99页的文章中提到所谓"抛球悖论"，大意如下：

第一次　小球从A点抛至B点。历时$\frac{1}{2}$分钟。

第二次　小球从B点抛回A点。历时$\frac{1}{4}$分钟。

第三次　小球又从A点抛至B点。历时$\frac{1}{8}$分钟。

……

依此类推，抛球次数遍历全体有限序数，即累计可数无穷多次。

试问：时间到达一分钟时该球到达何处？

把头n次抛球经历的时间记为t_n，n为奇数时球在B点，n为偶数时球在A点。而当n走遍奇数子序列和偶数子序列时均得出下式：

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 1.$$

由此该文作出结论："这说明到达一分钟时该球既可能抵达A处也可能抵达B处，显然这是一个悖论……"云云。

其实不然，理由如下：

根据题设条件，这场运动是在以下时空范围内定义的。运动空间是闭线段$[A,B]$。运动时间是各次抛球时间的累计，即以下可数无穷个闭时段的并集。

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right]\cup\cdots$$

$$=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right]\cup\left[\frac{7}{8},\ \frac{15}{16}\right]\cup\cdots=[0,\ 1).$$（无穷个闭集的并集）。

因而，运动的时间范围是半开时段$[0,\ 1)$。在此半开时段内的任何时刻，小球在闭线段$[A,\ B]$内有确定的位置。而一分钟时，即时刻1，虽然是这个半开时段的极限点，却根本不在这个半开时段内，即$1\in[0,\ 1)$，当然不能问此刻小球在何处，正如不能问时刻1.1时刻1.2…等等小球在何处一样。所以，正确地提问，则无悖无谬。

总之，这场无穷次抛球运动是在有限长的半开时段$[0,\ 1)$内完成的，不是在闭时段$[0,\ 1]$内完成的。因为在题设条件中根本没有定义小球在时刻1的位置。问题的症结正在于兹。该文末尾有一句话："于是，对每一时刻$t(0\leqslant t\leqslant 1)$要么"球到手"要么"球不到手"，两者必居其一"。明明应当是$0\leqslant t<1$，怎么会$0\leqslant t\leqslant 1$呢？显然，悖谬与否恰恰就在这"一刻"之差。

*1982年12月6日收到。