第3卷 第3期
1983年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.3
July, 1983

答《"抛球悖论"何悖之有》一文**

袁相碗

（南京大学）

张义杰同志在[2]中指出我们在[1]中所论及的抛球悖论不悖．现答复如下：

抛球悖论之作为Zeno悖论的引伸，实为众所周知，西方数理哲学界曾流传一时．我们在[1]中只是对此在$\mathbb{N}$上给出一个解释方法，并且主要目的是想借此说明$\mathbb{N}$的应用．

但是，下文即要具体指出，只要严格持有潜无限观点，确也可以避开这个问题．正是在这一点上，[2]中的有关论述是并不奇怪的（事实上[2]的作者是局限于标准分析学范畴讨论问题的）．

在古代，曾把推理过程看上去合理而推理结果违背实际的情况称为悖论，诸如著名的四个Zeno悖论就是，后来人们按照收敛的无穷级数可以求和的观点对有关的Zeno悖论给出了解释方法，然而人们随之就把Zeno悖论引伸为抛球问题，亦即既然收敛的无穷级数得以求和，那末，甲乙二人抛球所用时段序列当可求和，因而自始至1分钟时抛球手续应终止，故问此时球在何处？对此，因为潜无限论者不承认任何无穷过程能进行完毕，只承认可以无限地进行下去，从而抛球手续永远只能在无限制的往复进程之中，从而对此提问可以避而不答，也就无悖可言．但实无限论者是承认无限过程可以完成的，所以回避不了这个问题，却又无法回答这个问题，故就有抛球悖论之称．

[2]中的有关论述认为，抛球手续是在半开的时间区间$[0, 1)$内进行的，正因为$1 \notin [0, 1)$，故不能问1分钟时球在何处，因之正确的提问，无悖无谬云云．这正好表明[2]中所论是立足于潜无限观点来分析这个问题的，因为任何时刻$t_n \in [0, 1)$时，要么抛球手续尚未开始，要么还可以进行下去．这样，既然迴避了问题，当亦无悖可有了（实际上，只须说一句"t_n只对各个有限自然数n有定义"也就立即避开悖论）．然而这样的迴避毕竟是不现实的，须知时间区间$[0,1)$的长度总归是1，而且按实无限观点$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$可以求和且其和为1，所以在实际上是迴避不了问题的．

那么，所说[2]中有关论述是立足于潜无限观点的理论根据是什么？此乃因为标准分析是借助于严格的潜无限原则——$\varepsilon-\delta$定义与$\varepsilon-N$定义和方法——来奠定其理论基础（极限论）的．正因为如此，我们才在[1]中立足于实无限的非标准数域$^*R$上来考察时间序列$\{t_n\}(n \in \mathbb{N})$，并在$\mathbb{N}$上给出抛球悖论的解释方法，亦只有这样才能既不回避问题，又能作出回答，即已知$^*R$内的实数有内部结构，相应地，表现为实数的时间$t=1$（即时

** 此文先在讨论班上报告，整理成文后，由徐利治，朱梧槚，郑毓信审阅定稿．

点）也是有内部结构的，正是利用这一点，可以解释在时点取值

$$\mathrm{st}(t_{\nu_j})=\mathrm{st}(t_{\mu_j})=\mathrm{st}(t_\omega)=1$$

时球应达 A 与 B 处各有无穷多次，从而就更加明确其悖之有了（详见[1]之§3）。另外，我们在[3]中曾详细论述了任何悖论都是相对于某一系统而言的，而我们在[1]中也正是相对于非标准系统（即容许编号序列属于非Cantor自然数模型N）来表述和解释抛球悖论的。但[2]中所论却正好从反面偏离了这一点，以致形成误解。

以上意见仅供张义杰同志参考。此答若有不当之处，请读者批评指正。

参考文献

[1] 徐利治、朱梧槚、袁相碗、郑毓信，悖论与数学基础问题（Ⅰ），数学研究与评论，(1982)，第三期.

[2] 张义杰，抛球悖论何悖之有，数学研究与评论，(1983)，本期上文.

[3] 徐利治、朱梧槚、袁相碗、郑毓信，悖论与数学基础问题（Ⅱ），数学研究与评论，(1982)，第四期.

更正启事

本刊1983年第2期（总第9期）第131页所刊柯召、孙琦的“群论、组合论和代数数论中的一些不定方程问题”一文中，所提到的Alex给出不定方程 $1+y=z$，$yz=2^a3^b5^c7^d$；$a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0,d\geqslant0$ 的全部正整数解中，由于作者疏忽，漏掉了八组解，它们是 $(y,z)=(4,5),(6,7),(9,10),(15,16),(24,25),(35,36),(48,49),(80,81)$，理应补上。

曾有读者来信我部指出。特致谢意。

本刊编辑部

1983年6月22日