第3卷 第4期 数学研究与评论 Vol.3 No.4
1983年10月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Oct. 1983

一个代数无关性定理及其应用*

朱尧辰

（中国科学院应用数学研究所）

代数无关性是超越数论的重要课题。本文在 §1 中给出一个代数无关性的判别定理，在 §2 中，作为定理的应用研究了 Mahler 小数[1] 的代数无关性。

§1 代数无关性定理

我们用$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}^*$分别表示全体自然数，整数，非零有理数的集，用$\mathbb{Z}[z_1,\cdots,z_m]$表示$\mathbb{Z}$上的$m$元$z_1$，…，$z_m$的多项式环。

我们研究m个缺项级数

$$f_\nu(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\nu,k}z^{\lambda_{\nu,k}}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m),\tag{1}$$

其中 $\lambda_{\nu,k}(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\in\mathbb{N}$，单调趋于$\infty$，系数$a_{\nu,k}\in\mathbb{R}^*$。还设$g_\nu\in\mathbb{N}$，$g_\nu>1$ $(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，并记

$$\sigma_{\nu,n}=\sum_{k=1}^{n}a_{\nu,k}g_\nu^{-\lambda_{\nu,k}}\qquad\begin{pmatrix}\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\end{pmatrix},$$
$$\tau_{\nu,n}=f_\nu(g_\nu^{-1})-\sigma_{\nu,n}$$

本文中，符号≫≪之意义请见[2]，并且与它有关的常数都与n无关（不再一一申明）。

本节来证明下述

定理 1 如果（1）中的级数满足下列条件：

（i）$\lambda_{\nu,n}=o(\lambda_{\mu,n})\ (n\to\infty)\ (1\leqslant\nu<\mu\leqslant m)$，（2）

$$\lambda_{m,n}=o(\lambda_{1,n+1})\ (n\to\infty);\tag{3}$$

（ii）$a_{\nu,1}$，…，$a_{\nu,n}$的最小公分母$d_{\nu,n}$适合

$$\ln d_{\nu,n}=o(\lambda_{\nu,n+1})\ \ (n\to\infty)\ \ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m);\tag{4}$$

（iii）$|\tau_{\nu,n}|\gg\ll g_\nu^{-\lambda_{\nu,n+1}}\ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，（5）

那么

$$\xi_\nu=f_\nu(g_\nu^{-1})\ \ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

代数无关。

注 本定理可用[3]中的方法推广。特别，在上述定理中设系数$a_{\nu,k}>0$，并将（iii）换成（1）的收敛半径$\rho_\nu=1$，即为[3]中的推论 1.1。

*1981年5月30日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 用反证法。设$\Phi(z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}[z_1, \cdots, z_m]$，$\neq 0$，适合

$$\Phi(\xi_1, \cdots, \xi_m) = 0. \tag{6}$$

并设$\Phi(z_1, \cdots, z_m)$关于z_ν的次数为$s_\nu (\nu = 1, 2, \cdots, m)$。

由(2)(5)(6)及中值定理得

$$|\Phi(\sigma_{1,n}, \cdots, \sigma_{m,n})| = |\Phi(\sigma_{1,n}, \cdots, \sigma_{m,n}) - \Phi(\xi_1, \cdots, \xi_m)|$$

$$\ll \max_{1\le\nu\le m} |\tau_{\nu,n}| \ll (\min_{1\le\nu\le m} g_\nu)^{-\min\limits_{1\le\nu\le m} \lambda_{\nu,n+1}} \ll (\min_{1\le\nu\le m} g_\nu)^{-\lambda_{1,n+1}}. \tag{7}$$

由(6)，$\Phi(z_1, \cdots, z_m)$有Taylor展开

$$\Phi(z_1, \cdots, z_m) = \sum_{\vec{i} \neq \vec{0}} a_{\vec{i}} (z_1 - \xi_1)^{i_1} \cdots (z_m - \xi_m)^{i_m}, \tag{8}$$

其中下标$\vec{i} = (i_1, \cdots, i_m)$的分量是非负整数，(8)只对$a_{\vec{i}} \neq 0$的$\vec{i}$求和。于是

$$\Phi(\sigma_{1,n}, \cdots, \sigma_{m,n}) = \sum_{\vec{i} \neq \vec{0}} (-1)^{i_1 + \cdots + i_m} a_{\vec{i}} \tau_{1,n}^{i_1} \cdots \tau_{m,n}^{i_m}. \tag{9}$$

由(2)，当n充分大时，对于不同的$\vec{i}$，

$$\Lambda_{\vec{i},n} = i_1 \lambda_{1,n+1} \ln g_1 + i_2 \lambda_{2,n+1} \ln g_2 + \cdots + i_m \lambda_{m,n+1} \ln g_m$$

两两不同，所以有唯一的$\vec{j}$适合

$$\Lambda_{\vec{j},n} = \min_{\vec{i} \in (8)} \Lambda_{\vec{i},n}.$$

对于(8)中任一$\vec{i} = (i_1, \cdots, i_m)$，若$\vec{i} \neq \vec{j}$，则有适当的$l = l(\vec{i})$，使

$$i_m = j_m, \cdots, i_{l+1} = j_{l+1}, \quad i_l > j_l.$$

于是由(2)，(5)可知

$$\tau_{1,n}^{i_1} \cdots \tau_{m,n}^{i_m} / \tau_{1,n}^{j_1} \cdots \tau_{m,n}^{j_m} \ll \exp(\Lambda_{\vec{j},n} - \Lambda_{\vec{i},n}) \to 0 \ (n \to \infty).$$

因此由(9)，

$$|\Phi(\sigma_{1,n}, \cdots, \sigma_{m,n})| \gg |\tau_{1,n}^{j_1} \cdots \tau_{m,n}^{j_m}| \Big(|a_{\vec{j}}|$$

$$- \sum_{\vec{i} \neq \vec{0}, \vec{j}} |a_{\vec{i}}| e^{\Lambda_{\vec{j},n} - \Lambda_{\vec{i},n}}\Big) \gg |\tau_{1,n}^{j_1} \cdots \tau_{m,n}^{j_m}| > 0,$$

亦即

$$\Phi(\sigma_{1,n}, \cdots, \sigma_{m,n}) \in \mathbb{R}^*.$$

因为$\sigma_{\nu,n}$的分母是$d_{\nu,n} g_\nu^{\lambda_{\nu,n}}$，所以

$$|\Phi(\sigma_{1,n}, \cdots, \sigma_{m,n})| \gg \prod_{\nu=1}^{m} (d_{\nu,n}^{-s_\nu} \cdot g_\nu^{-s_\nu \lambda_{\nu,n}}). \tag{10}$$

由(2)，(3)，(4)知(7)(10)矛盾，故(6)不能成立，于是定理1得证。

§2 应用(Mahler小数的代数无关性)

K. Mahler[4] 有下列著名结果：在小数点后依次写上所有连续自然数所形成的十进小数

$$0.1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\cdots$$

是一个超越数。在[1]中他得到更一般的结果：设整数$g \geq 2$，而

$$\vec{\alpha} = (\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(n), \cdots)$$

是任意无穷维正整矢。在g进位制中，在小数点后依次写上

1，2，…，$g-1$，每个数重复$\alpha(1)$次；

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

g，$g+1$，…，g^2-1，每个数重复 $\alpha(2)$ 次；

……

g^{n-1}，$g^{n-1}+1$，…，g^n-1，每个数重复 $\alpha(n)$ 次；

等等。那么这样得到的 g 进位小数

$$\sigma=\sigma(\vec{a})=0.d_1\ d_2\ d_3\cdots \tag{11}$$

是超越数。

现在考察 Mahler 小数(11)的代数无关性。

定理 2　设整数 $g\geqslant 2$，而

$$\vec{a}_\nu=(\alpha_\nu(1),\ \alpha_\nu(2),\ \cdots,\ \alpha_\nu(n),\ \cdots)\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

是 m 个无穷维正整矢，适合

$$\alpha_\nu(n)=o(\alpha_\mu(n))\quad(n\to\infty)\quad(1\leqslant\nu<\mu\leqslant m), \tag{12}$$

$$\alpha_m(n)=o(\min(\alpha_1(n)g^n,\ \alpha_1(n+1))), \tag{13}$$

那么

$$\sigma_\nu=\sigma(\vec{a}_\nu)\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

代数无关。

在证明定理前先引进一些记号。对于任意的 $\vec{a}$，记

$$E_n=E_n(\vec{a})=(\alpha(1)+2\alpha(2)g+\cdots+n\alpha(n)g^{n-1})(g-1)\quad(n\geqslant 1),$$

$$u_k=u_k(\vec{a})=\frac{g^{k\alpha(k)+k}-g^k+1}{(g^k-1)(g^{k\alpha(k)}-1)}-\frac{g^{(k+1)\alpha(k+1)+k}-g^k+1}{(g^{k+1}-1)g^{(k+1)\alpha(k+1)}-1)}(k\geqslant 1),$$

$$u_0=u_0(\vec{a})=\frac{g^{\alpha(1)}}{(g-1)(g^{\alpha(1)}-1)}.$$

那么[1] $\sigma(\vec{a})$ 可表示为

$$\sigma(\vec{a})=u_0-\sum_{k=1}^{\infty}u_k g^{-E_k},$$

我们令

$$\sigma_n=\sigma_n(\vec{a})=u_0-\sum_{k=1}^{n}u_k g^{-E_k},\quad \tau_n=\tau_n(\vec{a})=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k g^{-E_k},$$

$$d_n=d_n(\vec{a})=\prod_{k=1}^{n+1}((g^k-1)(g^{k\alpha(k)}-1)),$$

并记

$$u_{\nu,n}=u_n(\vec{a}_\nu),\quad \sigma_{\nu,n}=\sigma_n(\vec{a}_\nu),\quad \tau_{\nu,n}=\tau_n(\vec{a}_\nu),\quad d_{\nu,n}=d_n(\vec{a}_\nu),$$

$$E_{\nu,n}=E_n(\vec{a}_\nu)=u_{\nu,0}-\sum_{k=1}^{\infty}u_{\nu,k}g^{-E_{\nu,k}}\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

引理 1　对任何无穷维正整矢 $\vec{a}$，

$$\tau_n\sim(1-g^{-1})g^{-E_{n+1}}\quad(n\to\infty).$$

证明　我们有

$$\tau_n=u_{n+1}g^{-E_{n+1}}\Big(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{u_k}{u_{n+1}}g^{-(E_k-E_{n+1})}\Big).$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=1-g^{-1},$$

而当 n 充分大时，对于 $k\geqslant n+2$，

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$$E_k-E_{n+1}=((n+2)\alpha(n+2)g^{n+1}+\cdots+k\alpha(k)g^{k-1})(g-1)\geqslant kg^{k-1},$$

所以

$$\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{u_k}{u_{n+1}}g^{-(E_k-E_{n+1})}\ll\sum_{s=(n+2)g^{n+1}}^{\infty}g^{-s}\ll g^{-(n+2)g^{n+1}}=0(1)\ (n\to\infty).$$

故得结论。

引理 2[5] 设 $a_n,b_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是两个无穷序列，$b_n>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=s$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=s$.

引理 3 若(12)(13)成立，则

$$\ln d_{\nu,n}=o(E_{1,n+1})\quad(n\to\infty)\quad(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m).\tag{14}$$

证明 因为 $d_{1,n}\leqslant d_{2,n}\leqslant\cdots\leqslant d_{m,n}$，所以只用对 $\nu=m$ 证明(14)。因为

$$\ln d_{m,n}<2\ln g\cdot(\alpha_m(1)+2\alpha_m(2)+\cdots+(n+1)\alpha_m(n+1)),$$

在引理 2 中取

$$a_n=n\alpha_m(n),\quad b_n=n\alpha_1(n)g^{n-1}\quad(n\geqslant1),$$

由(13)立得(14)。证完。

引理 4 若 (12)(13) 成立，则

$$E_{\nu,n}=o(E_{\mu,n})\quad(n\to\infty)\quad(1\leqslant\nu<\mu\leqslant m),\tag{15}$$

$$E_{m,n}=o(E_{1,n+1})\quad(n\to\infty).\tag{16}$$

证明 在引理 2 中取

$$a_1=o,\quad a_n=(n-1)g^{n-2}\alpha_m(n-1)\quad(n>1),\quad b_n=ng^{n-1}\alpha_1(n)\quad(n\geqslant1),$$

由 (13) 可得 (16)。类似地由 (12) 得 (15)。证完。

定理 2 的证明 将定理 1 应用于 $\sigma(\vec{a}_\nu)$，并取 $g_1=g_2=\cdots=g_m=g$。引理 4 表明条件 (i) 满足，由 (14)(15) 知条件 (ii) 满足，由引理 1 可得 (5)。于是定理 2 得证。

参 考 文 献

[1] Mahler, K., On a class of transcendental decimal fractions, *Common on pure and appl. math.*, 29(6), 1976, 717-725.

[2] Lang, S., Introduction to Transcendental Numbers, Addison-Wesley, 1966.

[3] 朱尧辰，一类缺项级数在有理点上值的代数无关性，数学学报 25:3 (1982), 333-339.

[4] Mahler, K., Arithmetisch Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen. *Proc. Akad. v. Wetensch., Amsterdam.* 40, 1937, 421-428.

[5] Pólya, G. and Szegö, G., Problems and Theorems in Analysis, Vol. 1, Springer Verlag, 1972, P. 16.

A Theorem about Algebraic Independence and Its Application

Zhu Yaochen

(Institute of Applied Math., Academia Sinica)

Abstract

In this note we prove a theorem about algebraic independence of the values of certain gap series in rational points, and as its application we obtain a result about algebraic independence of Mahler's fractions[1].

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.