第3卷 第4期
1983年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.4
Oct. 1983

模的根和底座*

李海军 薛新民

（北京工业大学二分校） （国家经委能源研究所）

在§1中我们将讨论模的根（定义1.1）以得到某些模类的分解性质，并由此推出Szász关于半本原的MHL-环（即主左理想满足降链条件的环，见［7］）的结构定理（命题1.8）。这样的环介乎半本原Artin环类和半本原环类之间，因而Szász定理自然地给出了一个介乎古典的Wedderburn-Artin定理和Jacobson定理（［2］，p.14）之间的环结构定理。由于我们在这定理中必须把环的Jacobson根代以Kertész根（定义1.7），这一对比还不是完善的。我们的工作将主要依赖于R-多余子模的概念，这里R是环（定义1.2）。在§2中我们将讨论模的底座（定义2.1）的相应问题。我们引入R-本质子模（定义2.2）的概念并论证§1中推广了的Sandomierski定理（［5］）的对偶命题。

本文中环指结合环，但不一定有1，模指左模。环R是半本原的，若其Jacobson根J(R)=0。

§1 模的根及其分解性质

1.1 **定义** 设R是环，M是R-模，记$\mathrm{Irr}_R\underline{M}$为$R$上既约模的全体。

(1) $\mathrm{Rad}M=\bigcap\{\ker h\,|\,h:M\rightharpoonup T$是$R$-同态，$T\in\mathrm{Irr}_R\underline{M}\}$叫做$M$的根；若$\mathrm{Irr}_R\underline{M}=\phi$，就定义$\mathrm{Rad}M=M$。

(2) 叫M做无根模，若$\mathrm{Rad}M=0$。

1.2 **定义** 设M是R-模，

(1) M的子模$L\leqslant M$叫做R-多余的，记作$L\overset{(R)}{\ll}M$。若对M的任意子模$N\neq M$，$RL+N\neq M$，易见．$L\overset{(R)}{\ll}M$当且仅当$RL\ll M$（RL在M中多余）。

(2) $x\in M$叫做R-非生成子．若$R^1x:=\mathbb{Z}x+Rx$是R-多余的，换言之，若$RR^1x=Rx\ll M$。

(3) $\phi(M)=\{x\in M\,|\,Rx\ll M\}$。换言之，$\phi(M)$是$M$中$R$-非生成子的集。

显然，若$L\ll M$，则$L\overset{(R)}{\ll}M$；若R有1且R-模都是么模，则R-多余子模就是多余子模，R-非生成子就是非生成子（［1］p130）。

1.3 **命题** 设M是R-模，$M\neq\mathrm{Rad}M$，$x\in M$，下列各点是等价的：(1) $x\in\mathrm{Rad}M$；(2) $x\in\bigcap\{K\leqslant M\,|\,M/K$是既约$R$-模$\}$；(3) 对$M$的任意极大子模$K$，$Rx\leqslant K$；(4) $x\in\Sigma L$，$L\overset{(R)}{\ll}M$；(5) $x\in\phi(M)$。

* 1982年8月4日收到。

证明　(1)$\Leftrightarrow$(2) 是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3) 设 $K\leqslant M$ 极大，若 M/K 是既约的，则 $x\in K$，故 $Rx\leqslant K$. 若 $R(M/K)=0$，则 $RM\subseteq K$，故 $Rx\leqslant K$.

(3)$\Rightarrow$(4) 我们证明 $Rx\ll M$，如果不然，则 $\exists N<M$，使 $Rx+N=M$，故 $x\notin N$，这样 $\exists K\leqslant M$ 在下列条件下极大，$x\notin K$，$N\subseteq K$，易知 $Rx\not\leqslant K$，而 K 就是 M 的极大子模，这与 (3) 矛盾.

(4)$\Rightarrow$(5) 设 $x\in\Sigma L$，$L\overset{(R)}{\ll}M$，则 x 可写成 $x=l_1+\cdots+l_n$，$l_i\in L_i$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\in\mathbb{N}$. 且 $RL_i\ll M$，因此 $Rx=R(l_1+\cdots+l_n)\leqslant RL_1+\cdots+RL_n$，易知有限个多余子模的和仍是多余的，故 $Rx\ll M$.

(5)$\Rightarrow$(2) 假设 $\exists M$ 的极大子模 K，$R(M/K)\neq 0$，使 $x\notin K$，故 $\mathbb{Z}\bar{x}+R\bar{x}=M/K$，$0\neq\bar{x}=x+K$，易见 $R\bar{x}\neq 0$，即 $Rx\not\leqslant K$. 由 K 的极大性 $Rx+K=M$. 这与 $x\in\phi(M)$ 矛盾. ▮

(2)、(4)的等价性是Sandomierski的定理的推广([5]).

称 $K\leqslant M$，是余既约子模，若 M/K 是既约模.

1.4 **命题**　设 $M\neq 0$ 是 R-模，下列两点是等价的：

(1) $\mathrm{Rad}M=0$；(2) M 是既约模的亚直和.

证明　(1)$\Rightarrow$(2) 设 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的余既约子模类，对 $\alpha\in A$ 考虑自然同态 $h_\alpha:M\to M/K_\alpha$ 和规范投射 $P_\alpha:\prod\limits_{\alpha\in A}(M/K_\alpha)\to M/K_\alpha$. 由直积的泛性知，存在唯一的同态 $h:M\to\prod\limits_{\alpha\in A}(M/K_\alpha)$ 使上图交换. $\ker h=\bigcap\ker P_\alpha h=\bigcap\ker h_\alpha=\bigcap K_\alpha=\mathrm{Rad}M=0$. 故 h 是嵌入，显然 M/K_α 是既约模，h_α 是到上同态，$\alpha\in A$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & \prod\limits_{\alpha\in A}(M/K_\alpha) \arrow[d, "P_\alpha"] \\ & M/K_\alpha \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & \prod\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \arrow[d, "P_\alpha"] \\ & I_\alpha \end{tikzcd}$$

(2)$\Rightarrow$(1) 设 M 是某个既约模族 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的亚直和，则存在嵌入 $h:M\to\prod\limits_{\alpha\in A}I_\alpha$ 定义 $h_\alpha:M\to I_\alpha$ 为 $h_\alpha=P_\alpha h$，P_α 是规范投射，$\alpha\in A$，则 $\mathrm{Rad}M\subseteq\bigcap\ker h_\alpha=\bigcap\ker P_\alpha h=\ker h=0$. ▮

1.5 **命题**　设 $M\neq 0$ 是 R-模，则下列两点是等价的：

(1) $\mathrm{Rad}M=0$ 且 M 的循环子模满足降链条件；

(2) M 是既约模的直和.

证明　(1)$\Rightarrow$(2)：对 $x\in M$，记 $R^1x=\mathbb{Z}x+Rx$ 是 x 生成的 M 的循环子模，则 $M=\sum\limits_{x\in M}R^1x$. 若 R^1x 非单，则 $\exists 0\neq y_1\in R^1x$ 使 $0<R^1y_1<R^1x$，由于 M 的循环子模满足 DCC，可以取 y_1 使 R^1y_1 极小，这样，R^1y_1 是单的，y_1 不是 R-非生成子，因为 $\phi(M)=\mathrm{Rad}M=0$. 于是 Ry_1 不是 M 的多余子模，因此 Ry_1 在 R^1x 中不是多余的. $\exists 0\neq P<R^1x$，使 $Ry_1+P=R^1x$. 故 $\exists r\in R$，$0\neq x_1\in P$，使 $x=ry_1+x_1$，因而 $R^1x=R^1y_1+R^1x_1$. 由 x_1 的定义：$R^1x_1<R^1x$，若 R^1x_1 非单，则继续以上过程，$R^1x_1=R^1y_2+R^1x_2$，R^1y_2 是单模，$x_2,y_2\in R^1x_1$. 于是有 M 的循环子模降链 $R^1x>R^1x_1>R^1x_2>\cdots$. 但 M 的循环子模满足 DCC，故 $\exists n\in\mathbb{N}$ 使 R^1x_n 是单模. 因此

$$R^1x=R^1y_1+\cdots+R^1y_{n-1}+R^1x_n \tag{*}$$

是单模的和，M也是单模的和，从而是单模的直和．由于$\phi(M)=0$，(*)中的项也是既约模，故M是既约模的直和．

(2)⇒(1) 由命题1.4，$\mathrm{Rad}M=0$．设$R^1x_1\geqslant R^1x_2\geqslant\cdots$　　(**)

是M的循环子模降链，$x_1,x_2\cdots\in M$．由于$M=\bigoplus_{\alpha\in A}I_\alpha$，$I_\alpha$是既约模，$x_1$可以表为$x_1=y_{\alpha_1}+\cdots+y_{\alpha_n}$，$y_{\alpha_k}\in I_{\alpha_k}$，$k=1,2,\cdots n$，$n\in\mathbb{N}$．因此$R^1x_1\leqslant I_{\alpha_1}\oplus\cdots\oplus I_{\alpha_n}:=S$，$I_{\alpha_k}$是单模，故为Artin模，因此$S$也是Artin模．这样，(**)是Artin模$S$的子模降链，故满足DCC．∎

1.6 **推论**　设$M\neq0$是R-模，则下列两点是等价的：

(1) $\mathrm{Rad}M=0$且M是Artin的(M是半单模[4])；(2) M是既约模的有限直和．∎

1.7 **定义**　设R是环，$\mathrm{Rad}({}_RR)$叫做R的左Kertész根，记作$k_l(R)$，相应地可以定义右Kertész根$K_r(R)$．

1.8 **推论** (Szász) 设R是环，若$J(R)=0$且R是MHL-环，则R是极小左理想的直和．

证明　由于模极大左理想是余既约的，$J(R)\supseteq K_l(R)$．∎

1.9 **推论** (Wedderburn-Artin) 设R是环，则下列两点是等价的：

(1) R是半本原Artin环；(2) R是单环的有限直和．∎

1.10 **例**　设$R=\{0,a,b,a+b\}$，其环运算为$a+a=b+b=0$．$a^2=a$，$ab=b$，$ba=b^2=0$，则由计算可得：子集合$\{0,b\}$是余既约右理想，$\{0,a\}$，$\{0,b\}$，$\{0,a+b\}$是余既约左理想．但$\{0,b\}$是唯一的模极大左理想，因此$J(R)=K_r(R)=\{0,b\}$，但$K_l(R)=\{0,a\}\cap\{0,b\}\cap\{0,a+b\}=0$．

Szász在[6]中曾论证了$J(R)\neq K_l(R)\neq K_r(R)$．∎

§2　模的底坐

2.1 **定义**　设R是环，M是R-模．$\mathrm{Soc}M=\Sigma\{\mathrm{im}h\,|\,h:T\to M$是$R$-同态，$T\in Irr_R\underline{M}\}$叫做$M$的底座．

若$Irr_R\underline{M}=\phi$则定义$\mathrm{Soc}M=0$．

2.2 **定义**　设M是R-模．$G\leqslant M$叫做R-本质的，若对M的任意子模$H\neq0$且$\mathrm{Ann}_HR=\{x\in H\,|\,Rx=0\}=0$，$G\cap H\neq0$，记作$G\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$．显然，若$G\trianglelefteq M$，($G$在$M$中本质)，则必有$G\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$；若$R$是有1的环，且$R$-模都是幺模，则$R$-本质与本质是一致的．

易见，R-多余子模和R-本质子模分别是多余子模和本质子模的推广．

2.3 **命题**　对于任意R-模M，$\mathrm{Soc}M=\Sigma H$，$H\leqslant M$是既约模．∎

2.4 **命题**　设$S\leqslant M$是既约R-模，则$\mathrm{Ann}_SR=0$．

证明　设$0\neq x\in\mathrm{Ann}_SR$，则$Rx=0$．由$S$的单性，有$\mathbb{Z}x+Rx=\mathbb{Z}x=S$．于是$RS=R\mathbb{Z}x=\mathbb{Z}Rx=0$，与$S$的既约性矛盾．∎

2.5 **命题**　若$G\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$，则$\mathrm{Soc}M\leqslant G$．

证明　设$S\leqslant M$是既约的，由2.4，$\mathrm{Ann}_SR=0$，故$G\cap S\neq0$，由S的单性，$G\cap S=S$，故$S\subseteq G$．由2.3，$\mathrm{Soc}M\subseteq G$．∎

2.6 **命题**　对于任意R-模M，$\mathrm{Soc}M=\cap G$，$G\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$．

证明 由2.5，只须再证 $\cap G\subseteq \mathrm{Soc}M$. 设 $a\in\cap G$，假设 $a\notin\mathrm{Soc}M$，则 $\exists K<M$ 在下列条件下极大 $K\supseteq\mathrm{Soc}M$，$a\notin K$. 我们证 $K\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$.

如若不然，则 $\exists 0\neq U\leqslant M$，$\mathrm{Ann}_U R=0$，使 $K\cap U=0$. 由 K 的极大性，$\mathrm{Soc}M\subseteq K\oplus U$，$a\in K\oplus U$，于是 $a=k+u$，$u\neq 0$ 故 $Ru\neq 0$. 于是我们不妨设上述 $U=\mathbb{Z}u+Ru\neq 0$. 先证 U 不是单的. 否则，由 $\mathrm{Ann}_U R=0$，有 $Ru\neq 0$. 于是，U 是既约的，故 $U\cap\mathrm{Soc}M=U\neq 0$. 但 $U\cap K\supseteq U\cap\mathrm{Soc}M$，故 $U\cap K\neq 0$. 这是矛盾的.

由于 U 不是单的. $\exists W<U$，使 $u\notin W$，$W\neq 0$，于是 $\mathrm{Soc}M\subsetneqq K\oplus W\subsetneqq M$，且 $a\notin K\oplus W$. 这与 K 的根大性矛盾，故 $K\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$. 现在，$a\notin\cap G$，$G\overset{(R)}{\trianglelefteq}M$. 这是矛盾的，故 $a\in\mathrm{Soc}M$. ∎

［附注］本文的大部分内容取自我们做研究生时的毕业论文［8］，［9］，这些论文是在我们的导师陈家鼐副教授指导下完成的，并得到北京师范大学刘绍学教授的审阅，在此对他们谨表谢意.

参 考 文 献

[1] Faith, C., Algebra II, Ring Theory, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[2] Jacobson, N., Structure of Rings, Providence, 1968.

[3] Kertész, A., Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 8, 235—257 (1957).

[4] ——, Ein Radikalbegriff für Moduln. In Rings, Modules and Radicals, p. 255—257, Amsterdam-London, 1973.

[5] Sandomierski, F. L., Relative injectivity and projectivity, Ph. D. Thesis, Penn. State U., 1964.

[6] Szász, F., On the Kertész radical of operator modules (Hungarian), Magyar *Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 10, 35—38 (1960).

[7] ——, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I, *Publ. Math. Debrecen* 7, 54—64 (1960).

[8] 李海军：多余模与多余生成模. 北京师范学院研究生毕业论文. 1981.

[9] 薛新民：模的根及无根模的分解. 北京师范学院研究生毕业论文. 1981.

Radicals and Socles of Modules

Lie Haiqung and *Xue Xengming*

Abstract

In §1, we discuss the properties of radicals of modules (definition 1.1) to obtain some decomposition properties of certain classes of modules. Szász's theorem on semiprimitive MHL-rings (rings with DCC on principal left ideals, [7]) will then be deduced. The class of such rings lies between that of the semiprimitive Artinian rings and that of the semiprimitive rings; so Szász's structure theorem presents a desirable intermediate to the classical Wedderburn-Artin theorem and the Jacobson the-

orem ([2], p. 14). Yet we are still missing a perfect analog because the Jacobson radical has been to be replaced by the Kertész radical (definition 1.7). This paper will rely heavily on the notion of R-superfluous submodules where R is a ring (definition 1.2).

In §2 we discuss the socles of modules (definition 2.1) to deal with the dual statement of the generalized Sandomierski theorem ([5]) obtained in §1.

In this paper all rings are associative but not necessarily have a multiplicative unit. The main results are the following.

Proposition 1.3 Let M be an R-module with $\mathrm{Rad}M \neq M$. For any $x \in M$ the following conditions are equivalent:

(1) $x \in \mathrm{Rad}M$,

(2) $x \in \bigcap\{K \leqslant M \mid M/K$ is irreducible R-module$\}$,

(3) $Rx \leqslant K$ for every maximal submodule K of M,

(4) $x \in \Sigma L$, L is R-superfluous submodule of M,

(5) $x \in \phi(M)$ where $\phi(M)$ consists of all elements x of M such that Rx is superfluous in M.

Proposition 1.4 An R-module $M \neq 0$ is isomorph to a subdirect sum of irreducible R-modules iff $\mathrm{Rad}M = 0$

Proposition 1.5 An R-module $M \neq 0$ is a direct sum of irreducible R-modules iff $\mathrm{Rad}M = 0$ and M satisfies DCC on the cyclic submodules.

Coroliary 1.6 An R-module $M \neq 0$ is a finite direct sum of irreducible R-modules iff Rad $M = 0$ and M is Artinian.

Corollary 1.8 (Szász) A Ring R is a direct sum of minimal left ideals if $J(R) = 0$ and R is an MHL-ring where $J(R)$ is the Jacobson radical of R.

Proposition 2.6 Let M be an R-module. For any $x \in M$ the following conditions are equivalent:

(1) $x \in \mathrm{Soc}M$;

(2) $x \in \Sigma H$, H is irreducible submodule of M,

(3) $x \in \bigcap G$, G is R-essential submodule of M.