第3卷 第4期 数学研究与评论 Vol.3 No.4
1983年10月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Oct. 1983

关于θ-加细性*

周友成

（浙江大学）

1965年Wicke和Worrell[2]提出θ-加细性的概念以后，许多学者对此种空间开展了研究，并提出了一系列弱于θ-加细性的复盖性质。

本文讨论了θ-加细性的逆象问题和遗传性问题。

（一）记号和定义

设$\mathcal{V}=\{V_\alpha: \alpha\in A\}$为拓扑空间的集族，记号order$(\mathcal{V}, x)$为集$\{\alpha: x\in V_\alpha, \alpha\in A\}$的基数，$\mathcal{V}^*=\cup\{V_\alpha: V_\alpha\in\mathcal{V}\}$。

设X为一拓扑空间，$\mathcal{V}$是具有形式$\cup\{\mathcal{V}_n: n\in N\}$的子集族，考虑$\mathcal{V}$上的条件[3]：

(a) 对每一点$x\in X$，存在一个$n\in N$使$0<\text{order}(\mathcal{V}_n, x)\leqslant\omega$；

(b) 对每一点$x\in X$，存在一个$n\in N$使$0<\text{order}(\mathcal{V}_n, x)<\omega$；

(c) 对每一$n\in N$，$\mathcal{V}_n$复盖X。

1. 如果X的每一开复盖有开加细$\mathcal{V}$满足(a)，X称为弱$\delta\theta$-加细的(weakly $\delta\theta$-refinable)；

2. 如果X的每一开复盖有开加细$\mathcal{V}$满足(a)和(c)，X称为$\delta\theta$-加细的($\delta\theta$-refinable)；

3. 如果X的每一开复盖有开加细$\mathcal{V}$满足(b)，X称为弱θ-加细的(weakly θ-refinable)；

4. 如果X的每一开复盖有开加细$\mathcal{V}$满足(b)和(c)，X称为θ-加细的(θ-refinable)；

5. 若空间X的任一开复盖都有局部可数的开加细复盖，X称为仿Lindelöf的(para-Lindelöf)；

6. 若空间X的任一开复盖都有按点可数的开加细复盖，X称为弱Lindelöf的(meta-Lindelöf)。

上述复盖性质有如下的熟知的蕴含关系[3]：

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{仿紧} & \Longrightarrow & \text{弱仿紧} & \Longrightarrow & \theta\text{-加细} & \Longrightarrow & \text{弱}\theta\text{-加细} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{仿Lindelöf} & \Longrightarrow & \text{弱Lindelöf} & \Longrightarrow & \delta\theta\text{-加细} & \Longrightarrow & \text{弱}\delta\theta\text{-加细}
\end{array}$$

（二）逆象问题

已知仿Lindelöf空间、弱Lindelöf空间、$\delta\theta$-加细空间、弱$\delta\theta$-加细空间、弱θ-加细空间在完备映象下的逆象分别是仿Lindelöf空间、弱Lindelöf空间、$\delta\theta$-加细空间、弱$\delta\theta$-加

* 1982年7月26日收到。

细空间、弱 θ-加细空间(见[9])，本文把完备映象减弱为具有 $f^{-1}(y)$ Lindelöf 的连续闭映象。

引理1 [6] 设 f 是空间 X 到空间 Y 的连续闭映象，E 是空间 Y 中的任一子集。则对 X 中包含 $f^{-1}(E)$ 的任何开集 U，存在 X 中的开集 V，使得 $f^{-1}(E)\subset V\subset U$ 且 $V=f^{-1}[f(V)]$，$f(V)$ 为空间 Y 中的开集。

定理1 设 f 为空间 X 到 $\delta\theta$-加细空间(弱 $\delta\theta$-加细空间) Y 上的连续闭映象，且对每一点 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 具有Lindelöf 性质，则 X 亦为 $\delta\theta$-加细的(弱 $\delta\theta$-加细的)。

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ 为 X 的任一开复盖，已知对任一点 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 具有Lindelöf 性质，则有 $\mathscr{U}$ 中可列个成员 U_{yi} 使

$$f^{-1}(y)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{yi}=U_y.$$

由引理1，存在 X 中开集 V_y 使 $f^{-1}(y)\subset V_y\subset U_y$ 且 $f^{-1}[f(V_y)]=V_y$，$f(V_y)=W_y$ 为 Y 中开集。于是，$\{W_y\colon y\in Y\}$ 为 Y 的一个开复盖。

由于 Y 是 $\delta\theta$-加细空间，存在 $\{W_y\}$ 的一个开加细序列 $\mathscr{L}=\{\mathscr{L}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，对任一 $j\in\mathbb{N}>$ $\mathscr{L}_j$ 加细 $\{W_y\}$ 且复盖 Y。对任一 $y\in Y$，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使

$$0<\operatorname{order}(\mathscr{L}_m,y)\leqslant\omega.$$

记 $\mathscr{L}_j=\{L_{j\gamma}\colon \gamma\in\Gamma_j\}$

$\mathscr{T}_j=\{f^{-1}(L_{j\gamma})\colon L_{j\gamma}\in\mathscr{L}_j\}$ 为 X 的开复盖。

由于 $\mathscr{L}_j$ 加细 $\{W_y\}$，对任一 $L_{j\gamma}$ 取定一个 $W_{y(j\gamma)}$ 使 $L_{j\gamma}\subset W_{y(j\gamma)}$

则
$$f^{-1}(L_{j\gamma})\subset V_{y(j\gamma)}\subset U_{y(j\gamma)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{y(j\gamma)i}$$

对 $j\gamma$ 作交 $f^{-1}(L_{j\gamma})\cap U_{y(j\gamma)i}$， $i=1,2,\cdots$.

对任一 $j\in\mathbb{N}$，族 $\{f^{-1}(L_{j\gamma})\cap U_{y(j\gamma)i}\colon L_{j\gamma}\in\mathscr{L}_j,\ i\in\mathbb{N}\}$ 显然是 $\mathscr{U}$ 的开加细复盖，记为 $\mathscr{F}_j$。

对任一 $x\in X, f(x)=y$，由前述，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使 $0<\operatorname{order}(\mathscr{L}_m,y)\leqslant\omega$。由于 $x\in f^{-1}(L_{j\gamma})\Rightarrow y\in L_{j\gamma}$，则 $0<\operatorname{order}(\mathscr{T}_m,x)\leqslant\omega$。

显然也有 $0<\operatorname{order}(\mathscr{F}_m,x)\leqslant\omega$。

因此，$\{\mathscr{F}_j\}_{j\in\mathbb{N}}=\{\{f^{-1}(L_{j\gamma})\cap U_{y(j\gamma)i}\}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{U}$ 的 $\delta\theta$-加细序列，X 为 $\delta\theta$-加细空间。证毕。

注 如果 Y 是弱 $\delta\theta$-加细空间，则证明中只要求 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}_j$ 加细 $\{W_y\}$，不要求每个 $\mathscr{L}_j$ 复盖 Y。最后也只有 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j$ 加细 $\mathscr{U}$ (每一 $\mathscr{F}_j$ 未必复盖 X)。于是 X 是弱 $\delta\theta$-加细的。

用类似于定理1的方法，我们不难得到关于仿Lindelöf与弱Lindelöf 的类似结果：

定理2 设 f 是空间 X 到仿 Lindelöf (弱 Lindelöf) 空间 Y 上的连续闭映象，且对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 具有Lindelöf性质，则 X 也是仿 Lindelöf (弱 Lindelöf) 空间。

定理3 设 f 为空间 X 到弱 θ-加细空间 Y 上的连续闭映象，且 $f^{-1}(y)$ 具有 Lindelöf 性质，则 X 为弱 θ-加细空间。

证明 设 $\mathscr{U}$ 为 X 的任一开复盖，已知对任一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 具有 Lindelöf 性质。则存在可列个 $\mathscr{U}$ 的成员 U_{yi} 使 $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{yi}=U_y$.

由引理1，存在X中开集V_y使$f^{-1}(y)\subset V_y\subset U_y$，且$V_y=f^{-1}[f(V_y)]$，$f(V_y)=W_y$为$Y$中开集。$\{W_y:\ y\in Y\}$为$Y$中的开复盖。由$Y$的弱$\theta$-加细性，存在$\{W_y\}$的开加细$\mathscr{L}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}_j$，对任一$y\in Y$存在$m\in\mathbb{N}$使

$$0<\mathrm{order}(\mathscr{L}_m,\ y)<\omega.$$

记$\mathscr{L}_j=\{L_{j\gamma}:\ \gamma\in\Gamma_j\}$：$\mathscr{T}_j=\{f^{-1}(L_{j\gamma}):\ L_{j\gamma}\in\mathscr{L}_j\}$，$\mathscr{T}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{T}_j$为$X$的开复盖。

对$L_{j\gamma}$取定$W_{y(j\gamma)}$使$L_{j\gamma}\subset W_{y(j\gamma)}$，则有

$$f^{-1}(L_{j\gamma})\subset V_{y(j\gamma)}\subset U_{y(j\gamma)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{y(j\gamma)i}$$

对$L_{j\gamma}$及$i\in\mathbb{N}$作交$f^{-1}(L_{j\gamma})\cap U_{y(j\gamma)i}$

记族$\{f^{-1}(L_{j\gamma})\cap U_{y(j\gamma)i}:\ \gamma\in\Gamma_j\}$为$\mathscr{F}_{ji}$，$\mathscr{F}=\bigcup_{j,i=1}^{\infty}\mathscr{F}_{ji}$，显然$\mathscr{F}$加细$\mathscr{U}$且复盖$X$。

对任一$x\in X$，$f(x)=y$，存在$m\in\mathbb{N}$使$0<\mathrm{order}(\mathscr{L}_m,y)<\omega$，由$x\in f^{-1}(L_{j\gamma})\cap U_{y(j\gamma)i}\Rightarrow y\in L_{j\gamma}$，有

$$0<\mathrm{order}(\mathscr{F}_m,x)<\omega.$$

则对x，存在$m\in\mathbb{N}$，对任意的$i\in\mathbb{N}$成立

$$0<\mathrm{order}(\mathscr{F}_{mi},x)<\omega,$$

故X为弱θ-加细空间。证毕。

问题　θ-加细空间在具有$f^{-1}(y)$是Lindelöf的连续闭映象下的逆象是否θ-加细的？

（三）遗传性

定义　空间X的子集M称为α-θ加细子集，如果对M的每一个由X的开集组成的复盖，存在由X的开集组成的θ-加细序列。

θ-加细空间的闭子集是α-θ加细子集。但弱仿紧甚至仿紧子集也未必是α-θ加细子集。[8]引的Niemytzki空间（见[10]）例子中，子集M（X轴）是仿紧而非α-弱仿紧子集；不难证明，M也不是α-θ加细子集。

定理4　空间X是可数多个α-θ加细闭子集之和，则X是θ-加细空间。

证明　设$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，其中$F_n$为闭子集；$\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in A\}$为$X$的任一开复盖。$\mathscr{U}$也是$F_n$的开复盖，由假设存在$X$中的开$\theta$-加细序列$\mathscr{V}_n=\{\mathscr{V}_{ni}\}_{i\in\mathbb{N}}$，复盖$F_n$。对任一$x\in F_n$，存在$k\in\mathbb{N}$使$0<\mathrm{order}(\mathscr{V}_{nk},x)<\omega$。对$n\in\mathbb{N}$，$i\in\mathbb{N}$作$S_{ni}=\mathscr{V}_{ni}\cup\{U\cap(X-F_n):\ U\in\mathscr{U}\}$，显然$S_{ni}$加细$\mathscr{U}$且复盖$X$。

对任一$x\in X$，存在F_n，使$x\in F_n$；又存在$k\in\mathbb{N}$使$0<\mathrm{order}(\mathscr{V}_{nk},x)<\omega$，而$\mathrm{order}(\{U\cap(X-F_n)\},x)=0$，因而$0<\mathrm{order}(S_{nk},x)<\omega$。故$X$为$\theta$-加细空间。证毕。

推论1　X是θ-加细空间，H为X的F_σ子集，则H是θ-加细的。

证明　设$H=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，$F_n$为$X$的闭子集（也是$H$的闭子集），从而是$\alpha$-$\theta$加细子集。由定理5，$H$是$\theta$-加细的。

定义　拓扑空间称为遗传性θ-加细的，如果它的每一子集都是θ-加细的。

引理 2 设X是θ-加细空间，X的每一开子集是θ-加细的，则X是遗传性θ-加细的。

证明 设E为X的任一子集，$\mathscr{V}=\{V_\alpha: \alpha\in A\}$为$E$的任一开复盖。则对每一个$V_\alpha$存在$X$中开集$U_\alpha$使$V_\alpha=E\cap U_\alpha$。从而，$\mathscr{U}=\{U_\alpha: \alpha\in A\}$为开集$G=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$的开复盖。由假设存在$\mathscr{U}$的开加细序列$\mathscr{W}=\{\mathscr{W}_n: n\in\mathbb{N}\}$，对任一$x\in G$，存在$n\in\mathbb{N}$使$0<\text{order}(\mathscr{W}_n,x)<\omega$。

定义 $\mathscr{L}_n=\{E\cap W: W\in\mathscr{W}_n\}$，则$\mathscr{L}=\{\mathscr{L}_n: n\in\mathbb{N}\}$为$\mathscr{V}$的加细序列，$\mathscr{L}_n$的成员为$E$中的开集。对任一$x\in E$，存在$m\in\mathbb{N}$使$0<\text{order}(\mathscr{L}_m,x)<\omega$,即$E$是$\theta$-加细的。因而，$X$是遗传性$\theta$-加细的。证毕。

推论 2 具有G_δ性质的θ-加细空间是遗传性θ-加细空间。

证明 X具有G_δ性质，则X的每一开子集是F_σ集。由定理 4，X的每一开子集是θ-加细的。由引理 2，X为遗传性θ-加细空间。证毕。

最后，作者对高国士老师的热心指导表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Junnila, H. J. K., Three covering properties, 《Surveys in General Topology》 Acad, Press, Inc (1980) 195-246.

[2] Worrell, J. M. and Wicke, H. H., Characterizations of developable topological spaces. *Canad, J. Math*, 17 (1965) 820-830.

[3] ——, Point countability and compactness, *Proc. Amer. Math. Soc* V55. N2 (1976) 427-431.

[4] Bennet, H. R., Lutzer, D. J., A note on weak θ-refinability, *Gen. Top. and Apple* 2 (1972) 49-54.

[5] Bennet, H. R., On quasi-developable spaces, *Gen. Top and Apple*, 1 (1971) 253-262.

[6] 高国士，仿紧性与完备映象，数学学报 23 (1980) 794-796.

[7] 戴牧民，σ按点族正规，σ亚紧性和σ按点有限基，数学学报 24 (1981) 656-667.

[8] 陈必胜，关于弱仿紧空间的注记，1981年成都交流稿

[9] Burke, D. K., Closed mappings 《Surveys in General Topology》 Acad, Press, Inc (1980) 1-32.

[10] Steen, L. B., and Seebach, J. A., Jr, 《Counterexamples in Topology》 Springer-Verlay, 1978.

On θ-refinability

Zhou Youcheng

Abstract

In this paper the preimage problem and hereditarility of θ-refinability are discussed.

The main results are as followsi (1) The preimage of weakly $\delta\theta$-refinable ($\delta\theta$-refinable, weakly θ-refinable) space under a continuous closed mapping with $f^{-1}(y)$ Lindelöf is weakly $\delta\theta$-refinable ($\delta\theta$-refinable, weakly θ-refinable) space; (2) The θ-refinable space with closed G_δ is a hereditarily θ-refinable space.