第 3 卷 第 4 期
1 9 8 3 年 10 月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICVL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.3 No.4
Oct. 1983

一类变系数动力系统的运动稳定性*

李 佳

（华中工学院）

本文通过引入线性算子 L_A，得到无穷矩阵序列 $\{A_k(t)\}$，基于此，讨论由"平均"系统稳定性确定原系统稳定性的条件，得到一些较为广泛的结果，包含了文[1]、[2]的相应结论。特别，对一些特殊类型的二阶系统，得到一些易于验证的直接判据。

（一）

令 E 为 $[t_0,\infty)$ 上 $n\times n$ 实连续函数矩降的全体。$\forall A(t)\in E$，引入算子 L_A: $E\to E$，定义为

$$L_Ap(t)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\, p(t)-p(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau,\qquad p(t)\in E. \tag{1.1}$$

取 $A_0(t)=A(t)$，定义

$$A_k(t)=L_AA_{k-1}(t),\ k=1,2,\cdots, \tag{1.2}$$

得到无穷矩阵序列 $\{A_k(t)\}$，$(k=0,1,2,\cdots)$，我们称为由 $A(t)$ 生成的序列。

我们首先建立

引理 1.1 对由 $A(t)$ 生成的序列 $\{A_k(t)\}$，以下等式成立：

1° $$\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^nA_k(t)=\sum_{l=0}^{n}c_n^lA_{k+l}(t)\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{n-l},\ k=0,1,2,\cdots; \tag{1.3}$$

2° $$\left(\exp\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)A_k(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_{k+l}}{l\,!}\left(\exp\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right),\ k=0,1,2,\cdots; \tag{1.4}$$

3° $$\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^n=\sum_{l=0}^{n-1}c_n^{l+1}A_l(t)\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^{n-l-1}; \tag{1.5}$$

4° $$\frac{d}{dt}\left(\exp\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l(t)}{(l+1)!}\left(\exp\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right). \tag{1.6}$$

其中，事先假设（1.4）、（1.6）式右边级数一致收敛。

证明是初等的，从略。

对二阶系统，$\{A_k(t)\}$ 有显式表达于下：

引理 1.2 对 $A(t)=(a_{ij}(t))\in E, i,j=1、2$，引入记号 $P(t)=(p_{ij}(t))=\left(\int_{t_0}^{t}a_{ij}(\tau)d\tau\right)$，

* 1982 年 1 月 10 日收到。

$i,j=1,2$，$T(t)=a_{11}(t)-a_{22}(t)$，$\Delta(t)=p_{22}(t)-p_{11}(t)$，$H(t)=a_{21}(t)p_{12}(t)-p_{12}(t)a_{12}(t)$，$s(t)=a_{21}(t)p_{12}(t)+p_{21}(t)a_{12}(t)$，则由 $A(t)$ 生成的序列 $\{A_k(t)\}$ 成立等式

$$\begin{cases} A_{2k}(t)=(\Delta^2(t)+4p_{12}(t)p_{21}(t))^{k-1}\begin{pmatrix} s(t)\Delta(t)+2p_{12}(t)p_{21}(t)T(t) & a_{12}(t)\Delta^2(t)+p_{12}(t)T(t)\Delta(t)-2p_{12}(t)H(t) \\ a_{21}(t)\Delta^2(t)+p_{21}(t)T(t)\Delta(t)+2p_{21}(t)H(t) & -s(t)\Delta(t)-2p_{12}(t)p_{21}(t)T(t) \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\cdots, \\ A_{2k+1}(t)=(\Delta^2(t)+4p_{12}(t)p_{21}(t))^{k}\begin{pmatrix} H(t) & -a_{12}(t)\Delta(t)-p_{12}(t)T(t) \\ a_{21}(t)\Delta(t)+p_{21}(t)T(t) & -H(t) \end{pmatrix} \quad k=0,1\cdots. \end{cases} \tag{1.7}$$

证明由归纳法可得，从略。

（二）

考虑线性系统

$$\dot{x}=A(t)x, \qquad A(t)\in E, \qquad t\geqslant t_0 \tag{A}$$

由(1.1)式引入算子 L_A，并按(1.2)式生成矩阵序列 $\{A_l(t)\}$，$l=0,1,2,\cdots$，我们有

定理 2.1 如果系统（A）满足以下条件：

$H1$） $A_l(t)$ 当 $t\to\infty$时对 l 一致趋于零；

$H2$） $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t-t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau=G$，且 $L_AG\equiv0$，$\forall\, t\geqslant t_0$；

$H3$） $\mathrm{Re}\lambda(G)\leqslant-\alpha<0$，$\alpha$ 为常数；

则系统渐近稳定。

证明 记 $A^*(t)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l(t)}{(l+1)!}$，$A^{**}(t)=A(t)-A^*(t)$，由 $H1$)，$A^*(t)$、$A^{**}(t)$ 在 (t_0,∞) 上有定义且连续，于是（A）可表为

$$\dot{x}=A^*(t)x+A^{**}(t)x. \tag{2.1}$$

由引理 1.1 式(1.6)，记 $\Phi(t,t_0)$ 为 $\dot{y}=A^*(t)y$ 的状态转移矩阵，则有

$$\Phi(t,t_0)=\exp\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

于是(A)的在区间 $[T,\infty)$ 上具初值 $x(T)$ 的解

$$\begin{aligned} x(t)&=\Phi(t,T)x(T)+\int_T^t\Phi(t,\tau)A^{**}(\tau)x(\tau)d\tau \\ &=\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(T,t_0)x(T)+\int_T^t\Phi(t,t_0)\phi^{-1}(\tau,t_0)A^{**}(\tau)x(\tau)d\tau,\quad (T\geqslant t_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

易得 $\Phi^{-1}(\tau,t_0)A^{**}(\tau)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kk}{(k+1)!}A_k(\tau)\Phi^{-1}(\tau,t_0)$. 令 $\tilde{A}(\tau)=\Sigma\dfrac{(-1)^kk}{(k+1)!}A_k(\tau)$，

则

$$\phi^{-1}(\tau,t_0)A^{**}(\tau)=\tilde{A}(\tau)\Phi^{-1}(\tau,t_0). \tag{2.4}$$

代入式(2.3)得到 $x(t)=\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(T,t_0)x(T)+\int_T^t\Phi(t,t_0)\widetilde{A}(\tau)\phi^{-1}(\tau,t_0)x(\tau)d\tau$.

故 $\|\Phi^{-1}(t,t_0)x(t)\|\leqslant\|\Phi^{-1}(T,t_0)\|\|x(T)\|+\int_T^t\|\widetilde{A}(\tau)\|\|\Phi^{-1}(\tau,t_0)x(\tau)\|d\tau$,

$$\|x(t)\|\leqslant\|\Phi^{-1}(T,t_0)\|\|x(T)\|\|\Phi(t,t_0)\|\exp\int_T^t\|\widetilde{A}(\tau)\|d\tau. \tag{2.5}$$

以下对 $\|x(t)\|$ 进行估计.

1° 由 $H2$)，$\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau=G(t-t_0)+R(t)(t-t_0)$，其中 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=0$.

又因 $\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau\cdot G=G\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau$，故有 $R(t)G=GR(t)$，于是 $\|\phi(t,t_0)\|\leqslant\|e^{G(t-t_0)}\|\|e^{R(t)(t-t_0)}\|$.

由 $H3$)，$\mathrm{Re}\lambda(G)\leqslant-\alpha<0$，取 $\delta>0$，使 $-(\alpha-3\delta)<0$. 当 t 充分大，如 $t\geqslant T^*$ 时，显然可有

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant Ne^{-(\alpha-2\delta)(t-t_0)}，\text{其中 } N>0 \text{ 为常数.} \tag{2.6}$$

2° 由 $H1$)，$\forall l\geqslant1$，$\lim\limits_{t\to\infty}\|A_l(t)\|=0$，从而可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\int_T^t\|A_l(T)\|d\tau}{t-T}=0$. 不失一般性，可设 $t\geqslant T^*$ 时

$$\int_T^t\|\widetilde{A}(\tau)\|d\tau\leqslant\sum_{k=1}^{k}\frac{k}{(k+1)!}\int_T^t\|A_k(\tau)\|d\tau\leqslant\delta(t-T). \tag{2.7}$$

将 (2.6)、(2.7) 代入 (2.5)，得 $\|x(t)\|\leqslant M\|\Phi^{-1}(T,t_0)\|\|x(T)\|e^{-(\alpha-3\delta)t}$，其中 $M>0$ 为常数. 故 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$. 定理得证.

注 由(2.5)式与(2.6)式可得

$$\|x(t)\|\leqslant\widetilde{M}e^{-(\alpha-2\delta)t}\exp\int_T^t\|\widetilde{A}(\tau)\|d\tau，\widetilde{M}>0 \text{ 为常数.} \tag{2.8}$$

于是定理 2.1 中 $H1$) 可减弱为

(i) 存在充分小的正数 $\sigma>0$，使得

$$\|A_k(t)\|\leqslant\alpha-\sigma,\quad\forall t\geqslant t_0,\quad\forall k\geqslant1; \tag{2.9}$$

或 (ii) 存在常数 $b\geqslant0$，满足 $b<\ln(\alpha+1)$，使得

$$\|A_k(t)\|\leqslant b^k,\quad\forall t\geqslant t_0,\quad\forall k\geqslant1. \tag{2.10}$$

应用引理 1.2 和定理 2.1，对一些特殊类型的二阶系统可以得到直接的判据.

以下考虑二阶系统

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)\end{pmatrix}x,\quad t\geqslant t_0. \tag{A$'$}$$

沿用引理 1.2 的记号：$P(t)=(p_{ij}(t))=\left(\int_{t_0}^t a_{ij}(\tau)d\tau\right), i,j=1,2, T(t)=a_{11}(t)-a_{22}(t)$, $\Delta(t)=p_{22}(t)-p_{11}(t)$.

判据 I 如 (A$'$) 满足定理 2.1 中条件 $H2$)、$H3$)，并有 $a_{12}(t)\equiv a_{21}(t)\triangleq a(t)$，$\forall t\geqslant t_0$ 则只要当 t 充分大时

$$|\Delta^2(t)+4p^2(t)|\leqslant1, \tag{2.11}$$

$$Q(t)\triangleq a(t)\Delta(t)+p(t)T(t)\to0,\quad t\to\infty, \tag{2.12}$$

其中 $p(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau$，系统必渐近稳定。

证明 由引理1.2，这时

$$\begin{cases}A_{2k}(t)=Q(t)(\Delta^2(t)+4p^2(t))^{k-1}\begin{pmatrix}2p(t)&\Delta(t)\\\Delta(t)&-2p(t)\end{pmatrix} & k=1,2,\cdots,\\ A_{2k+1}(t)=Q(t)(\Delta^2(t)+4p^2(t))^{k}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & k=0,1,\cdots.\end{cases}$$

由(2.11)、(2.12)，当 $t\to\infty$ 时，$\forall l\geqslant 1$，$A_l(t)$ 一致趋于零，于是定理2.1的条件全部满足，得证。

例 1

$$A(t)=\begin{pmatrix}-\alpha+\sqrt{2}\sin t^2+\frac{1}{\sqrt{t+1}} & 2\sqrt{2}\sin t^2-\sqrt{\pi}e^{-t}\\ 2\sqrt{2}\sin t^2-\sqrt{\pi}e^{-t} & -\alpha+e^{-t^2}+\frac{1}{\sqrt{t+1}}\end{pmatrix}\quad t\geqslant 0,\ \alpha>0 \text{ 为常数。}$$

这时，

$$G=\begin{pmatrix}-\alpha&0\\0&-\alpha\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta(t)&=\int_0^t(e^{-t^2}-\sqrt{2}\sin t^2)dt\to 0,\\ p(t)&=\int_0^t(2\sqrt{2}\sin t^2-\sqrt{\pi}e^{-t})dt\to 0,\end{aligned}\right.\quad (t\to\infty)$$

显然还有 $Q(t)\to 0$，故系统渐近稳定。

例 2

$$A(t)=\begin{pmatrix}-1+e^{-t}+\cos t+t\sin t^4 & \frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\\ \frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2} & -1+\cos t+t\sin t^4\end{pmatrix},\quad t\geqslant t_0>0.$$

这时

$$G=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$\Delta(t)=e^{-t}-e^{-t_0}$，$p(t)=\frac{\sin t}{t}-\frac{\sin t_0}{t_0}$。不失一般性，可设 t_0 充分大，故 $|\Delta^2(t)+4p^2(t)|<1$，而

$$Q(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}(e^{-t}-e^{-t_0})+e^{-t}\left(\frac{\sin t}{t}-\frac{\sin t_0}{t_0}\right)\to 0,\quad t\to\infty,$$ 于是系统渐近稳定。

判据Ⅲ 如(A′)满足定理2.1中 $H2$)、$H3$)。并有 $a_{11}(t)\equiv a_{22}(t)$，$\forall t\geqslant t_0$；$p_{12}(t)$、$p_{21}(t)$ 有界；

$$|p_{12}(t)p_{21}(t)|\leqslant\frac{1}{4},\tag{2.13}$$

及

$$H(t)\triangleq a_{21}(t)p_{12}(t)-p_{21}(t)a_{12}(t)\to 0,\quad t\to\infty;\tag{2.14}$$

则系统渐近稳定。

证明 这时

$$\begin{cases} A_{2k}(t) = 2H(t)(4p_{12}(t)p_{21}(t))^{k-1}\begin{pmatrix} 0 & -p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & 0 \end{pmatrix}, & k=1,2,\cdots, \\ A_{2k+1}(t) = H(t)(4p_{12}(t)p_{21}(t))^{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & k=0,1,\cdots, \end{cases}$$

由（2.13）、（2.14）得到：当 $t\to\infty$ 时，$A_l(t)$ 对 $\forall l\geqslant 1$ 一致趋于零，故得证。

例 3

$$A(t)=\begin{pmatrix} -\alpha+\beta\sin\omega t\cos\omega t+\gamma\cos^2\omega t & c_1\cos\omega t-c_2\sin\omega t\cos\omega t \\ \dfrac{1-t}{(t+1)^3} & -\alpha+\beta\sin\omega t\cos\omega t+\gamma\mathrm{sos}^2\omega t \end{pmatrix},$$

$t\geqslant 0$，α，β，γ，c_1，c_2，ω 为常数。

这里 $p_{12}(t)=\dfrac{c_1}{\omega}\sin\omega t-\dfrac{c_2}{2\omega}\sin^2\omega t$，　$p_{21}(t)=\dfrac{t}{(t+1)^2}$，显然均有界，而当 t 足够大时，$|p_{12}(t)p_{21}(t)|<\dfrac{1}{4}$。又易见 $\lim\limits_{t\to\infty}H(t)=0$。

$$G=\begin{pmatrix} -\alpha+\dfrac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & -\alpha+\dfrac{\gamma}{2} \end{pmatrix},$$

于是当　$\alpha>\dfrac{\gamma}{2}$　时系统渐近稳定。

以下继续讨论 n 阶系统（A）。如存在 $n\geqslant 1$ 使 $A_n(t)\equiv 0,\ \forall t\geqslant t_0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}A_l(t)=0, l=1,\cdots,n-1$，则定理 2.1 的条件 $H1$）自然满足，由此可得

推论 2.1　如（A）满足定理 2.1 中的 $H2$）、$H3$），且成立

$H1)'$　$\exists n\geqslant 1$，使 $A_n(t)\equiv 0$，$\forall t\geqslant t_0$，而 $\lim\limits_{t\to\infty}A_l(t)=0$，$l=1,\cdots,n-1$，则系统渐近稳定。

文［1］中的 Лаппа-Данилевский 定理及文［2］的定理显然分别为推论 2.1 中 $n=1$ 与 $n=2$ 的特例。

我们还可以得到

定理 2.2　如系统（A）满足

1°　$\exists n\geqslant 1$，使 $A_n(t)\equiv 0$，　$\forall t\geqslant t_0$；

2°　$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t-t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t}A_l(\tau)d\tau\triangleq G_l$，

$L_{A_l}G_l\equiv 0$，即 $\displaystyle\int_{t_0}^{t}A_l(\tau)d\tau\cdot G_l\equiv G_l\cdot\int_{t_0}^{t}A_l(\tau)d\tau$，$l=0,1,\cdots,n-1$，　$\forall t\geqslant t_0$；

3°　$L_{A_l}A_{l+k}(t)\equiv 0$，$l=1,\cdots,n-1$，$1\leqslant k+l\leqslant n-1$；

4°　$\lambda+\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}c_l\lambda_l<0$，其中 λ，λ_l 分别表示 G（即 G_0）、G_l（$l=1,\cdots,n-1$）的特征根实部的最大值，而 c_l 满足关系式 $c_l=-\dfrac{1}{(l+1)!}-\displaystyle\sum_{i=0}^{l-1}\dfrac{c_i}{(l-i)!}$，$l=1,\cdots,n-1$，$c_0=0$；

则系统渐近稳定。

证明　这时（A）的状态转移矩阵

$$\Phi(t,t_0)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)\exp\left(c_1\int_{t_0}^{t}A_1(\tau)d\tau\right)\cdots\exp\left(c_{n-1}\int_{t_0}^{t}A_{n-1}(\tau)d\tau\right). \tag{2.15}$$

事实上，
$$\dot{\Phi}(t,t_0)=\left(\sum_{l=0}^{n-1}\frac{A_l(t)}{(l+1)!}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k-1}\frac{c_kA_{l+k}(t)}{l!}\right)\Phi(t,t_0)$$
$$=A(t)\Phi(t,t_0)+\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(l+1)!}+\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k}{(l-k)!}\right)A_l(t)\Phi(t,t_0)$$
$$=A(t)\Phi(t,t_0).$$

在假设条件下，
$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant Me^{(\lambda+\sum_{l=1}^{n-1}c_l\lambda_l)(t-t_0)}\ e^{(1+\sum_{l=1}^{n-1}c_l)\delta(t-t_0)},$$
取 $\delta>0$ 充分小，得到
$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t,t_0)=0.$$ 定理得证.

注 由(2.15)可见，定理 2.2 实际上指出了一类系统的可解性. 文[3]的部分结果显然为定理 2.2 的特例.

（三）

考虑系统
$$\dot{x}=(A(t)+B(t))x,\qquad A(t)、B(t)\in E. \tag{P}$$

我们知道，如系统 $\dot{y}=A(t)y$ 一致渐近稳定，则当 $B(t)$ 充分小时，(P) 仍一致渐近稳定. 但是，如去掉一致性的前提，有例子表明[4]，即使系统 $\dot{y}=A(t)y$ 的所有解指数式趋于零，且存在常数 $\gamma>0$ 使得 $\|B(t)\|\leqslant c^{-\gamma t}$，系统$(p)$仍可以不稳定. 但在定理 2.1 的基础上，我们可以得到以下结论.

定理 3.1 设系统 (P) 中 $A(t)$ 满足定理 2.1 中条件 $H1)\sim H3)$. $B(t)$ 满足

i) $L_A(B(t)\equiv 0,\ \forall t\geqslant t_0$;

ii) $\lim_{t\to\infty}B(t)=0$;

则系统渐近稳定.

证明 由假设 i)，(P)的解
$$x(t)=\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(T,t_0)x(T)+\int_T^t\Phi(t,t_0)\tilde{A}(\tau)\Phi^{-1}(\tau,t_0)x(\tau)d\tau$$
$$+\int_T^t\Phi(t,t_0)B(\tau)\Phi^{-1}(\tau,t_0)x(\tau)d\tau,$$
类似定理 2.1 的证明立即可得系统(P)渐近稳定.

定理 3.2 设系统 (P)中 $A(t)$ 满足定理 2.1 中条件 $H1)\sim H3)$. 记G的特征根实部的最小、最大值分别为 $-\lambda_1$，$-\lambda_n$，如当 t 充分大时还有 $\|B(t)\|\leqslant e^{-\beta t}$，$\beta>\lambda_1-\lambda_n$ 为常数，则系统渐近稳定.

证明 由假设条件，$\exists T^*\geqslant t_0$，当 $t\geqslant T^*$ 时，
$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant Ne^{-(\lambda_n-2\delta)(t-t_0)}, \tag{3.1}$$
$$\|\Phi^{-1}(t,t_0)\|\leqslant\|e^{-G(t-t_0)}\|\cdot\|e^{-R(t)(t-t_0)}\|\leqslant Ne^{(\lambda_1+2\delta)(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

$\forall t \geqslant T \geqslant T^*$，（P）的具初值 $x(T)$ 的解

$$x(t)=\Phi(t,T)x(T)+\int_T^t \Phi(t,\tau)A^{**}(\tau)x(\tau)d\tau+\int_T^t \Phi(t,\tau)B(\tau)x(\tau)d\tau. \qquad (3.3)$$

所以 $$\|\Phi^{-1}(t,t_1)x(t)\| \leqslant \|\Phi^{-1}(T,t_0)\|\|x(T)\|+\int_T^t \|\widetilde{A}(\tau)\|\|\Phi^{-1}(\tau,t_0)x(\tau)\|d\tau + \int_T^t \|\Phi^{-1}(\tau,t_0)\|\|B(\tau)\|\|x(\tau)\|d\tau,$$

由 Gronwall 不等式

$$\begin{aligned}\|\Phi^{-1}(t,t_0)x(t)\| \leqslant & \|\Phi^{-1}(T,t_0)\|\|x(T)\| \exp\int_T^t \|\widetilde{A}(\tau)\|d\tau \\ & + \int_T^t \exp\left(\int_T^t \|\widetilde{A}(s)\|ds\right)\|\Phi^{-1}(\tau,t_0)\|\|B(\tau)\|\|x(\tau)\|d\tau \\ & \leqslant Ne^{(\lambda_1+2\delta)(T-t_0)}\|x(T)\|e^{\delta(t-T)} \\ & + N\int_T^t e^{\delta(t-\tau)}e^{(\lambda_1+2\delta)(\tau-t_0)}\,e^{-\beta\tau}\|x(\tau)\|d\tau.\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\|x(t))\| \leqslant & N^2e^{(\lambda_n-\lambda_1-4\delta)t_0+(\lambda_1+\delta)T}\|x(T)\|e^{-(\lambda_n-3\delta)t} \\ & + N^2e^{(\lambda_n-\lambda_1-4\delta)t_0}\cdot e^{-(\lambda_n-3\delta)t}\int_T^t e^{(\lambda_1-\beta+\delta)\tau}\|x(\tau)\|d\tau. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

令 $$M_1=N^2e^{(\lambda_n-\lambda_1-4\delta)t_0+(\lambda_1+\delta)T},\quad M_2=N^2e^{(\lambda_n-\lambda_1-4\delta)t_0},$$

得 $$e^{(\lambda_n-3\delta)t}\|x(t)\| \leqslant M_1\|x(T)\|+M_2\int_T^t e^{(\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta)\tau}e^{(\lambda_n-3\delta)\tau}\|x(\tau)\|d\tau.$$

又由 Gronwall 不等式

$$\begin{aligned}\|x(t)\| & \leqslant M_1\|x(T)\|e^{-(\lambda_n-3\delta)t}\exp\left\{M^2\int_T^t e^{(\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta)\tau}d\tau\right\} \\ & = M_1\|x(T)\|e^{-(\lambda_n-3\delta)t}\exp\left\{\frac{M_2}{\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta)t}-e^{(\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta)T}\right)\right\} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

因 $\beta>\lambda_1-\lambda_n$，故可有 $\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta<0$，又显然可设 $t>0$，于是

$$\|x(t)\| \leqslant M_1\left\{-\frac{M_2}{\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta}e^{(\lambda_1-\lambda_n-\beta+4\delta)T}\right\}\|x(T)\|e^{-(\lambda_n-3\delta)t},$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$。定理证毕。

注 对不满足定理 2.1 条件的系统，可通过分解，验证是否满足定理 3.1、定理 3.2 的条件，这样，就拓广了用“平均”系统描述原系统的应用范围。尤其对二阶系统，分解常常是很方便的。

完全类似于定理 3.2 的证明，可以得到

定理 3.3 对系统

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,x). \qquad (B)$$

其中 $A(t)\in E$，$f(t,x)$ 对 $t\geqslant t_0$ 连续，对 $\|x\|<H$ 有连续的一阶偏导数。设 $A(t)$ 满足定理 2.1 的条件 $H1)\sim H3)$，G 的特征根实部的最小、最大值分别为 $-\lambda_1$、$-\lambda_n$。如当 t 充分大时还有 $\|f(t,x)\|\leqslant e^{-\beta t}\|x\|$，其中 $\beta>\lambda_1-\lambda_n$，则 (B) 的零解渐近稳定。

定理 3.4 对系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-c)^{[5]}, \tag{C}$$

其中 $A(t)$、$B(t)\in E$，$\tau>0$ 为常数。如 $A(t)$、$B(t)$ 满足定理 3.2 的全部条件，则系统 (C) 零解渐近稳定。

本文得到俞玉森教授、李森林教授和高克强副教授的关怀和指导，谨致衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Демчтович, Б. П, Лекции по математичеcкой теории устойчивости М.《Hayka》 1967.

[2] Скатецкий, В. Т., Асимпототическая устойчцвость решений некоторой лцнейной системы Дифференц. *Уравнения* Том ⅩⅢ No. 5, 1977.

[3] Wu, M. Y., Solvability and representation of linear time-varying systems, *Int. J. Control* Vol. 31, No. 5, 1980.

[4] Hale, J. K., Ordinary Differential Equation, Wiley-Interscience New York 1969.

[5] Driver, R. D., Ordinary and Delay Differential Equations, Springer-Verlag New York 1977.

On the Stability of Motion of Certain Dynamical Systems with Time-Varying Coefficients

Li Jia

Abstract

In this paper the linear operator

$$L_A(\cdot)=\int_{t_0}^{t}A(t)dt(\cdot)-(\cdot)\int_{t_0}^{t}A(t)dt$$

is introduced. Based on the sequence $\{A_k(t)\}$, being formed through $L_A A_{k-1}(t)=A_k(t)$, $A_0(t)=A(t)$, we can obtain the suffcient conditions by which the asymptotic stability of the "average" system $\dot{x}=Gx$, $G=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}A(t)dt$, implies the asymptotic stability of the original system $\dot{x}=A(t)x$, and the correspondent conclusions of the papers [1],[2] become the special cases in this paper. Particularly, for some second-order systems, direct criteria of asymptotic stability have been got.

Besides, some conclusions are also obtained for other linear systems or nonlinear system or linear system with delay.