第 3 卷 第 4 期 1983年10月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol.3 No.4 Oct. 1983

不动点理论的新发展(Ⅱ)上*

张石生

(四川大学)

本文是文章[1]的续篇．本文的目的是扼要地概述近十年来单值和多值非扩张映象、平均非扩张映象、Schauder 和 Caristi 型映象不动点理论发展中的一些主要问题和主要结果．

§1．关于单值非扩张与平均非扩张映象的不动点定理

定义 1 设 (X, d) 是一完备度量空间，T 是映 X 到 X 的映象，T 称为非扩张映象，如果

(1) $$d(Tx,Ty)\leqslant d(x,y), \qquad \forall x,y\in X.$$

T 称为 Kannan 意义下的非扩张映象（见[35]），如果

(2) $$d(Tx,Ty)\leqslant \frac{1}{2}\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}, \qquad \forall x,y\in X.$$

T 称为平均非扩张映象（见[3]），如果

(3) $$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\} + c\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}, \qquad \forall x,y\in X,$$

其中 $a,b,c\geqslant 0$，且 $a+2b+2c\leqslant 1$．

条件(3)的几何意义是明显的，即以 x,y,Tx,Ty 为顶点的四边形，边长 $d(Tx,Ty)$ 不大于其余三边及两对角线之长的平均值．应当指出：条件(3)中当 $b=c=0$，$a\leqslant 1$ 时即为通常的非扩张映象；如果 $a=c=0$，$b\leqslant\frac{1}{2}$ 即为 Kannan 型的映象；如果条件(3)中的 a,b,c 为依赖于 x,y 的非负实值函数，且 $a(x,y)+2b(x,y)+2c(x,y)\leqslant 1$，则可得出另一类型的平均非扩张映象[8]：

(4) $$d(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)d(x,y)+b(x,y)\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\} + c(x,y)\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}, \qquad \forall x,y\in X,$$

或等价的，对一切的 $x,y\in X$

(4)′ $$d(Tx,Ty)\leqslant \max\{d(x,y),\frac{1}{2}[d(x,Tx)+d(y,Ty)], \frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\}.$$

定义 2 设 (X, d) 是一完备度量空间，设 S，T 是映 X 到 X 的映象．S，T 称为平均非扩张映象对[15]，如果

(5) $$d(Sx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b\{d(x,Sx)+d(y,Ty)\} + c\{d(x,Ty)+d(y,Sx)\}, \quad \forall x,y\in X,$$

*1981年10月23日收到．

其中 $a,b,c\geqslant 0$，$a+2b+2c\leqslant 1$。

S，T称为广义平均非扩张映象对[15]，如果

(6) $$d(Sx,Ty)\leqslant\Phi(d(x,y),d(x,Sx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)),\quad \forall x,y\in X,$$

其中 $\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$ 满足条件：

(i) Φ：$[0,\infty)^5\to[0,\infty)$，对每一变量不减和上半连续；

(ii) 对每一 $t>0$

(a) $\Phi(t,t,t,\alpha t,0)\leqslant\beta t$，$\Phi(t,t,t,0,\alpha t)\leqslant\beta t$，

这里当 $\alpha=2$ 时 $\beta=1$；当 $\alpha<2$ 时，$\beta<1$。

(b) 当$\alpha<2$ 时，$\Phi(t,0,\alpha t,t,t)<t$。

我们知道非扩张映象T一般不一定存在不动点。即使对自反 Banach 空间中的非扩张映象，是否存在不动点，至今仍然是一个未解决的问题。同时，即使存在不动点，Picard 迭代序列 $x_n=T(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，其中 x_0 是X中之一给定元，也不一定收敛于它的不动点。因此寻求非扩张映象（或平均非扩张映象）存在不动点的条件，以及找出他种形式的迭代序列，使之收敛于其不动点，就具有重要的意义。

定义 3 设X是一 Banach 空间，E是X的闭凸集，E称为具有正规结构，如果对于E中任何包含不止一点的闭凸子集K，必存在点 $y\in K$，使得

$$\sup_{x\in K}\|y-x\|<\delta(K)\quad(\delta(k)\text{表}K\text{的直径})。$$

如果上面的条件改为对任意的 $x\in K$，有

$$\|y-x\|<\delta(K),$$

则称集E具有次正规结构（见[24]）。

显然，具正规结构的集合必具有次正规结构。

称映象T满足渐近正规性条件，如果对任一关于T不变的包含不止一点的闭凸集K，必存在 $x,y\in K$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\|y-T^nx\|<\delta(K)。$$

容易看出，若集合E具有正规结构，则任何映E到E的映象T，满足渐近正规性条件。

关于非扩张映象的不动点问题，Browder [36] 首先证明：设T是映Hilbert 空间中的有界闭凸集到其自身的非扩张映象，则T存在不动点。不久 Browder[22]，和 Göhde[26] 进一步证明：如果T是映一致凸 Banach 空间中的有界闭凸集到其自身的非扩张映象，则T存在不动点。以后 Kirk [23] 又证明了如下的著名的结果。

定理 2.1 [23] 设X是一自反 Banach 空间，设K是X中具正规结构的有界闭凸集，设T是映K到K的非扩张映象。则T在K中存在不动点。

关于非扩张映象的不动点问题 Holmes, Lan, Kirk, Lim, Bruck 等人还分别在 [24,27,29,30] 中讨论过。

1975 年和 1976 年作者对第（3）类的平均非扩张映象证明了下面的一些结果：

定理 2.2 [3] 设X是一 Banach 空间，K是X的闭凸集，T是$K\to K$的第（3）类的平均非扩张映象。则T在K中存在不动点，且对某一 $x_0\in K$，序列 $\{x_n\}$：$x_n=T_\lambda^n x_0$，$n=$

1,2,…，这里 $\lambda\in[0,1)$，$T_\lambda=\lambda I+(1-\lambda)T$，收敛于$T$在$K$中之一不动点的充分必要条件是：在$X$中存在一非空闭集$G$，使得

(i) $$\|Tx-p\|\leqslant\|x-p\|,\qquad \forall x\in K,\ p\in G;$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\inf\{\inf_{p\in G}\|T_\lambda^n x_0-p\|\}=0.$$

注 1　当平均非扩张映象条件（3）中的常数 $b=c=0$，由定理 2.2 特别给出非扩张映象T存在不动点，且对某一 $x_0\in K$，序列 $\{x_n=T_\lambda^n x_0\}$ 收敛于T的不动点的充分必要条件。

定理 2.2 的结果，后来被作者在文章［4,2］中推广到映象序列的情形。

定理 2.3［3］　设X是 Banach 空间，K是X中的闭凸集，T是映K到K的第（3）类的平均非扩张映象。则T在K中存在不动点，且对某一 $x_0\in K$，序列 $\{x_n=T_\lambda^n x_0\}$，$\lambda\in[0,1)$，收敛于T在K中之一不动点的充分必要条件是：

(i) $$\lim_{n\to\infty}\|T_\lambda^n x_0-T_\lambda^{n+1}x_0\|=0;$$

(ii) 在X中存在紧致集G，使得

$$\lim_{n\to\infty}\{\inf_{p\in G}\|T_\lambda^n x_0-p\|\}=0.$$

定理 2.4［3］　设X是自反 Banach 空间，K是X中的闭凸集，T是映 $K\to K$ 的第(3)类连续的平均非扩张映象，且条件（3）中的 $b>0$。再设 $\Phi(x)=\|x-Tx\|$ 是定义在K上的弱下半连续泛函。则T在K中存在不动点，且对某一 $x_0\in K$，序列 $\{x_n=T_\lambda^n x_0\}$ 收敛于T在K中之一不动点的充分必要条件是：

(i) 在X中存在一非空闭集G，使得

$$\|Tx-p\|\leqslant\|x-p\|,\quad \forall x\in K,\ p\in G;$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\|T_\lambda^n x_0-T_\lambda^{n+1}x_0\|=0.$$

定理 2.5［3］　设X是自反 Banach 空间，K是X中的非空有界闭凸集，T是映K到K的第（3）类的连续平均非扩张映象。又设条件（3）中的 $b>0$，且对K中每一包含不止一点的非空有界闭凸集F有

$$\sup_{x\in F}\|x-Tx\|<\delta(F).$$

则T在K中存在唯一不动点。

前面我们已经指出过 Kannan 型的非扩张映象（即第（2）类非扩张映象）是第（3）类的平均非扩张映象的特例。关于第（2）类非扩张映象，作者在［2］中证明了下之结果：

定理 2.6［2］　设X是自反 Banach 空间，K是X中的非空有界闭凸集，$T_1,\cdots,T_m$是映K到K的连续映象，且满足

$$\|T_ix-T_jy\|\leqslant\frac{1}{2}\{\|x-T_ix\|+\|y-T_jy\|\},\quad \forall x,y\in K,$$
$$i,j=1,2,\cdots,m.$$

则 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 在K中存在唯一的公共不动点。

注 2　定理 2.6 的结论在 $m=1$和在补充条件K具正规结构或次正规结构的条件下，由 Kannan［35］证明，我们这里并没有作这样的假定，而且证明方法也简单得多。

定理 2.7 [3] 设X是自反Banach空间，K是X的有界非空闭凸集．设T是映K到K的连续映象，且满足条件

(i) $$\|Tx-Ty\|\leqslant a\|x-y\|+b\|x-Tx\|+c\|y-Ty\|,\quad \forall x,y\in X,$$

其中$a,b,c\geqslant 0$，$a+b+c\leqslant 1$；

(ii) K具正规结构．

则T在K中存在不动点．

注 3 如果$b=c=0$，$a=1$，由定理2.7即得前述的（Kirk的）定理2.1．另外，我们知道一致凸Banach空间的非空有界闭凸集具有正规结构（见[23]）．故定理2.7的条件（ii）可用空间的一致凸性代替．因而当$b=c=0$，$a=1$时即得Browder [22]中的定理．

最近赵汉宾在文章[6,7]中关于第（3）类的平均非扩张映象证明了如下的定理．

定理 2.8 [6] 设X是Banach空间，E是X中的非空闭凸集，T是映E到E的第(3)类的平均非扩张映象，且设条件（3）中的常数a，c满足$a+2c<1$．则

(i) T在E中存在唯一的不动点x_*；

(ii) 对任一$\lambda\in(0,1)$和$x_0\in E$，序列$x_{n+1}=\lambda x_n+(1-\lambda)Tx_n$，$n=0,1,2,\cdots$收敛于$x_*$；

(iii) 存在某一正整数N和$\theta\in(0,1)$，当$kN\leqslant n$时，$(k=1,2,\cdots)$，

$$\|x_n-x_*\|\leqslant\frac{N\theta^k}{1-\theta}\left(\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\|x_{j+1}-x_j\|\right).$$

定理 2.9 [7] 设X是Banach空间，E是X中的非空闭子集，T是映E到E的第(3)类的平均非扩张映象，且条件（3）中的$b>0$，$c>0$．则T在E中存在唯一的不动点x_*，而且对任意$x_0\in E$，$\{T^nx_0\}$收敛于x_*．

定理 2.10 [7] 设X，E，T之意义如定理2.9中者．再设条件(3)中的$b>0$，且下之一条件成立：

(i) T在E上连续；

(ii) $2b<1$；

(iii) 对E中任一包含不止一点的相对于T不变的闭凸集K有

$$\inf_{x\in K}\|x-Tx\|<\delta(K);$$

(iv) 集E具次正规结构．

则T在E中存在唯一的不动点．

注 4 定理2.10在某种意义下，推广了定理2.5和定理2.6．

定理 2.11 [7] 设X，T的意义同前一定理，设E是X的有界非空闭凸集．设条件(3)中的$b=0$．再设T满足渐近正规性条件．则T在E中存在不动点．

注 5 定理2.11，推论了定理2.7．

定义 4 Banach空间X称为Opial空间[23]），如果序列$\{x_n\}\subset X$，$x_n\xrightarrow{w}x_\infty$，则对一切的$y\in X$，$y\neq x_\infty$成立

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_\infty\|<\limsup_{n\to\infty}\|x_n-y\|.$$

我们知道 Hilbert 空间、具弱连续对偶映象的一致凸 Banach 空间，都是 Opial 空间的例子（见[20]）。

关于第（4）类的平均非扩张映象，1980 年倪录群等在文章[8]中，证明了下面的一个结果。

定理 2.12 [8] 设 X 是自反的 Opial 空间，K 是 X 中的非空弱闭集，T 是映 K 到 K 的第（4）类的平均非扩张映象，如果存在 $x\in K$，使得轨道 $O_T(x,0,\infty)$ 有界，而且条件(4)中的系数 $C(x,y)$ 满足条件

$$\beta=\inf_{y,z\in O_T(x,0,\infty)}C(y,z)>0.$$

则 T 在 K 中存在不动点 x_*，而且 $T^nx\to x_*$.

定理 2.13 [8] 设 X 是一致凸的 Banach 空间，K 是 X 的非空闭凸集，T 是映 K 到 K 的第（4）类的平均非扩张映象．则对任一 $x_1\in K$，Mann 迭代序列

$$x_{n+1}=(1-t_n)x_n+t_nTx_n,\ n=1,2,\cdots,$$

其中 $t_n\in[a,b]$，$0<a\leqslant b<1$，具有下面的性质：

(i) 设 T 在 K 中有不动点，则 $\{x_n\}$ 的任意弱聚点是 T 的不动点；

(ii) 设 T 在 K 中有唯一不动点，则 $\{x_n\}$ 弱收敛于这一不动点。

最后，我们再对第（5）类和第（6）类平均非扩张映象对作些讨论。

由定义明显看出，第（3）类的平均非扩张映象是第（5）类平均非扩张映象当 $S=T$ 时的特例．另外我们也容易看出，第（5）类当 $b\neq0$，$c\neq0$ 时是第（6）类平均非扩张映象对的特例．事实上，我们在条件（6）中取

$$\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=at_1+b(t_2+t_3)+c(t_4+t_5),$$

其中 $a,b,c\geqslant0$，$a+2b+2c\leqslant1$，$b\neq0$，$c\neq0$，即可得出条件(5)．

关于第（6）类平均非扩张映象对 Bose 在[15]中得出下之

定理 2.14 [15] 设 X 是一致凸的 Banach 空间，K 是 X 中的非空闭凸集，设 S，T 是映 $K\to K$ 的第（6）类的平均非扩张映象对，则存在 $u\in K$，使得

(i) $Su=Tu=u$；

(ii) u 分别是 S 和 T 的唯一不动点；

(iii) 对任一 $x_0\in K$，下之序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 u：

$$x_1=Sx_0,\ x_2=Tx_1,\ x_3=Sx_2,\cdots.$$

由定理 2.14 特别得出第（5）类平均非扩张映象之一不动点定理．

定理 2.15 [15] 设 K，X 之意义如定理 2.14．设 S，T 是映 K 到 K 的第（5）类平均非扩张映象对，且 $c\neq0$，则

(i) S 和 T 有一公共不动点 $u\in K$；

(ii) 如果 $b\neq0$，则

(a) u 是 S，T 的唯一公共不动点；而且 u 也分别是 S 和 T 的唯一不动点；

(b) 对任一 $x_0\in K$，由下式定义的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 u：

$$x_1=Sx_0,\ x_2=Tx_1,\ x_3=Sx_2,\cdots.$$

定义 5 设 (X,d) 是一完备的度量空间，设$\mathscr{B}$是映X到X的映象族．设对任一对映象S，$T\in\mathscr{B}$，都存在与之相应的实数$a=a(S,T)\geqslant 0$，$b=b(S,T)\geqslant 0$，$c=c(S,T)\geqslant 0$，$a+2b+2c\leqslant 1$，使得条件（5）成立．则称$\mathscr{B}$为第（5）类的平均非扩张映象族．

最近作者对第（5）类的平均非扩张映象对和平均非扩张映象族的公共不动点问题在[5]中证明了下之结果．

定理 2.16 [5] 设 (X,d) 是一完备的度量空间，设S，T是映X到X的第（5）类的平均非扩张映象对，且设条件（5）中的常数c，b，满足$0<c\leqslant 2b$．则存在$x_*\in X$，使得

(i) $Sx_*=Tx_*=x_*$；

(ii) x_*是S和T的唯一的不动点；

(iii) 对任一$x_0\in X$，由下式定义的序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$收敛于x_*：

$$(**)\qquad x_{2n+1}=Sx_{2n},\quad x_{2n+2}=Tx_{2n+1},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

注 6 当$S=T$时，不需$c\leqslant 2b$，只需$b,c>0$．故赵汉宾[7]的定理1（即前面所列的定理2.9）是定理2.16的特例．另外，定理2.16也改进了 Bose [15] 中的结果（即前面所列的定理2.15）．其次 Goebel, Kirk. Shimi [21] 在X是一致凸 Banach 空间，且$S=T$的条件下也曾用不同的方法证明过定理2.16的结论，故定理2.16也是[21]中结果的改进．

定理 2.17 [5] 设 (X,d) 是一完备的度量空间，设$\mathscr{B}$是映X到X的第（5）类的平均非扩张映象族，设对任一对映象S，$T\in\mathscr{B}$，与之相应的在（5）中出现的非负数$a=a(S,T)\geqslant 0$，$b=b(S,T)>0$，$c=c(S,T)>0$，$0<c\leqslant 2b$，$a+2b+2c\leqslant 1$．则

(i) 存在唯一$x_*\in X$，使得$Tx_*=x_*$，$\forall T\in\mathscr{B}$；

(ii) 对每一$T\in\mathscr{B}$，x_*是T的唯一不动点；

(iii) 对任一对映象S，$T\in\mathscr{B}$和任一$x_0\in X$，由（$**$）所定义的序列$\{x_n\}$收敛于x_*．

定理 2.18 [5] 设 (X,d) 是一完备的度量空间，设$\mathscr{B}$是映X到X的映象族．设对任一对映象S，$T\in\mathscr{B}$，存在与之相应的正整数$m=m(S,T)$，$n=n(S,T)$和与之相应的实数$a=a(S,T)\geqslant 0$，$b=b(S,T)>0$，$c=c(S,T)>0$，$0<c\leqslant 2b$，$a+2b+2c\leqslant 1$，使得对一切$x,y\in X$，下式成立：

$$d(S^m x,T^n y)\leqslant ad(x,y)+b\{d(x,S^m x)+d(y,T^n y)\}+c\{d(x,T^n y)+d(y,S^m x)\}.$$

则定理2的结论仍成立．

注 7 Kannan [34] 的定理1，Srivastava, Gupta [32] 的定理1，Chi Song Wong [33] 的定理3，Jaiswal, Singh [16] 的定理1，以及作者[2]的定理2，3，[4]的定理5，6都是定理2.17和定理2.18的特例．

编辑部注：由于篇幅的缘故，本文（Ⅰ）分上下两半刊出，文献目录刊在下半部份中．