第 3 卷 第 4 期 1983年 10 月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.4 Oct. 1983

近五年来中国数理统计工作者的部分理论成果（Ⅰ）*

陈桂景 吴启光 赵林城
（安徽大学） （中国科学院系统所） （中国科技大学）

这里介绍的是本文几位作者及与他们有联系的一些同志，自1977年以来，在数理统计理论方面取得的主要理论成果。我们挑选了成果较多的四个方面，国内其他一些同志的成果，包括本文作者的某些成果，因不属于这四个方面，故在本文中没有提到，又因为作者们所见有限，可能会遗漏某些应该提及的工作，请有关的同志予以谅解。

本文共分四部分，分别涉及线性模型中参数估计的理论、概率密度的估计、经验 Bayes 估计的大样本理论及非参数统计，因全文较长，分（Ⅰ）、（Ⅱ）两篇发表，（Ⅰ）由陈桂景等三人执笔，（Ⅱ）由陈希孺执笔。

§1 线性模型中参数估计理论

形如
$$Y_i=x_i'\beta+e_i,\quad i=1,\cdots,n,\cdots \tag{1·1}$$
的模型，称为线性统计模型。其中$\{x_i\}$为一串已知的p维向量，常称为设计点列。β为未知的p维回归系数向量，$\{e_i\}$为随机误差序列。以下记
$$\begin{aligned}&x_i=(x_{i1},\cdots,x_{ip})',\quad \beta=(\beta_1,\cdots,\beta_p)',\quad e_{(n)}=(e_1,\cdots,e_n)',\\&Y_{(n)}=(Y_1,\cdots,Y_n)',\quad X_n=(x_1\vdots\cdots\vdots x_n)',\quad S_n=X_n'X_n.\end{aligned} \tag{1·2}$$
这种模型在统计中的极重要地位，及关于它的一些基本的理论结果，在统计学家中是很熟悉的。自六十年代以来，关于这个模型的研究，开拓了一些新的方向。其中有的有较大的实用意义，有的则有较大的理论兴趣。近年来，我国数理统计工作者在这方面作出了一些贡献，有的结果还有一定的深度。这包括线性模型的参数估计的大样本理论及可容许性理论。本节的内容，就是对我国统计工作者近年来在这方面取得的成果，作一综合性的论述。

一、回归系数估计的大样本理论

（一）LS估计弱相合问题　在研究β的线性函数的估计问题时，不失普遍性可设S_n为满秩。这时，β的基于$Y_{(n)}$的最小二乘(LS)估计为
$$\hat\beta_n=(\hat\beta_{1n},\cdots,\hat\beta_{pn})'=S_n^{-1}X_n'Y_{(n)} \tag{1·3}$$
作为古典弱大数问题的自然推广，Eicker[1]首先于1963年提出了$\hat\beta_n$的弱相合问题，即在什么条件下有$\hat\beta_n\xrightarrow{P}\beta$。他指出，在Gauss-Markov假定(或条件)
$$Ee_{(n)}=0,\quad Var(e_{(n)})=\sigma^2I_n,\quad \sigma^2<\infty \tag{1·4}$$
之下，S_n的最大特征根趋于0，即
$$S_n^{-1}\to0\quad(n\to\infty) \tag{1·5}$$

* 1982年5月12日收到。

为 LS 估计 $\hat{\beta}_n$ 弱相合的充分条件。但此条件是否必要，则长期未能解决。Drygas 在[2]中首先给出了必要性的证明。之后，陈希孺[6]也独立地用不同的方法作出了必要性的证明。于是得到

定理1.1 设模型(1.1)满足G-M条件(1.4)，那么当$n\to\infty$时$\hat{\beta}\xrightarrow{P}\beta$（即$\hat{\beta}_n$弱相合）的充要条件为(1.5)。

文献[6]还在G-M条件不成立，即在更一般假设条件

$$Ee_{(n)}=0,\qquad Var(e_{(n)})=\Sigma_n \tag{1.6}$$

下，研究了 $\hat{\beta}_n$ 弱相合的充分条件，得到

定理1.2 以$\lambda(\Sigma_n)$记Σ_n的最大特征根，则当

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(\Sigma_n)S_n^{-1}=0 \tag{1.7}$$

时，有 $\hat{\beta}_n\xrightarrow{P}\beta\quad(n\to\infty)$。

[6]还仔细地论证了，对于有实际意义的误差序列$\{e_i\}$及常见的回归模型，条件(1.7)总是成立的，而且此条件很难从实质上加以改进了。

（二）一般线性弱相合估计的存在性问题。 设 $C'\beta$ 为一可估函数，称形如

$$T_n=C_{n0}+\Sigma_{i=1}^{n}C_{ni}Y_i \tag{1.8}$$

的估计为一线性估计。由定理 1.1 已得：在G-M条件下，$C'\beta$ 的 LS 估计 $C'\hat{\beta}_n$ 的弱相合性与均方相合性（即 $\lim_{n\to\infty}E(C'\hat{\beta}_n-C'\beta)^2=0$）等价，当条件(1.5)不成立时，LS 估计必不弱相合。于是人们自然地提出如下问题：此时 $C'\beta$ 还存不存在其它的均方相合的或弱相合的线性估计？陈希孺深入地讨论了这一问题，并给予了较为彻底的回答。

定理1.3 （陈希孺[6]，[8]）在 G-M 条件下，当条件(1.5)不成立时，$C'\beta$ 的线性均方相合估计不可能存在，但可能存在线性弱相合估计。

定理1.4 （陈希孺[8]）设模型(1.1)满足条件

$$\{e_i\}\text{相互独立},\ Ee_i=0,\ Ee_i^2=\sigma^2<\infty,\ i=1,2,\cdots, \tag{1.9}$$

又设$\{e_i\}$满足条件

A：“不存在常数 a 及自然数子列$\{n_k\}$，使得 $e_{n_k}\xrightarrow{P}a\ (k\to\infty)$”，

那么当 $C'\beta$ 的 LS 估计不为弱相合时，则它必不存在其他弱相合的线性估计。反之，若条件A不满足，则可找到试验点列$\{x_i\}$，可估函数 $C'\beta$，使 $C'\beta$ 的 LS 估计不弱相合，但存在其他的线性弱相合估计。

（三）LS估计的 r- 阶平均相合性 本小段仅假定 e_i 的 r 阶矩有限，$r\in(0,2)$，若

$$\lim_{n\to\infty}E|\hat{\beta}_{in}-\beta_{in}|^r=0\qquad i=1,\cdots,p, \tag{1.10}$$

则称 LS 估计 $\hat{\beta}_n$ 具有 r- 阶平均相合性。

陈希孺首先在[9]中给出了 $\hat{\beta}_n$ 具有 r- 阶平均相合性的充分条件，尔后陈桂景[10]，白志东[11]改进了他的结果，得到了下面两个定理。

定理1.5 设$\{e_i\}$互相独立，并设$\{|e_i|^r\}$一致可积．当 $r\geqslant 1$ 时，设 $Ee_i=0, i=1,2,\cdots$；当 $r\in(0,1)$时，设 e_i 的分布以原点为对称点．那么如果试验点列满足条件

$$S_n^{-1}=O(n^{(r-2)/r}),\tag{1.11}$$

则对任一给定的 a>1，有

$$E\|\hat{\beta}_n-\beta\|^r=O\{n^{-(\alpha-1)(2-r)/2\alpha}+(\alpha_n(n^{1/\alpha r}))^{r/2}\},\tag{1.12}$$

其中 $\alpha_n(c)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\int_{|x|>c}|x|^r dF_i(x)$，$F_i(x)$ 为 e_i 的分布。

定理1.6　设$\{e_i\}$相互独立，当 $r\in[1,2)$ 时，$Ee_i=0$，$i=1,2,\cdots$，又设存在常数M，使

$$E|e_i|^r\leqslant M\qquad i=1,2,\cdots,\tag{1.13}$$

那么又如有

$$S_n^{-1}=o(n^{(r-2)/r}),\tag{1.14}$$

则 $\hat{\beta}_n$ 是 r- 阶平均相合的。

显然，"$\{|e_i|^r\}$一致可积"⇒(1.13)，即定理1.6对$\{e_i\}$的要求有所减轻，但以加强$\{x_i\}$的条件为代价。文献[16]举例说明了，在定理 1.5 中关于"$\{|e_i|^r\}$一致可积"的条件不能减弱为(1.13)。

文献[9]，[10]，[11]及[17]还进一步讨论了下面一些问题：(1)当 $\{e_i\}$ 满足定理 1.5 要求时，条件(1.11)并不是必要的。但是对其已不能作任何实质性的改进。比如，不能把它减弱为$S_n^{-1}=O(n^{(r-2)/r}(\log n)^{\frac{2}{r}+\varepsilon})$，对任一$\varepsilon>0$。(2)即使在 $e_1,e_2,\cdots$为独立同分布的条件下，$\hat{\beta}_n$ 的 r 阶平均相合性与弱相合性也不等价。(3)当 $\hat{\beta}_n$ 不为 r 阶平均相合时，是否存在其它 r 阶平均相合的线性估计？若 $1\leqslant r<2$，$e_1,e_2,\cdots$相互独立，$Ee_i=0,Ee_i^2\leqslant M<\infty$，且$\{e_i\}$满足定理 1.4 的条件$A$时，则当 $\hat{\beta}_n$ 不为 β 的 r 阶平均相合估计时，别无其它线性的 r 阶平均相合估计存在。但若仅假定 e_i 的 r 阶矩矩有限，这个问题还有待于研究。

（四）LS估计的强相合性　若当 $n\to\infty$时 $\hat{\beta}_n\to\beta$，a.s.，则称 $\hat{\beta}_n$ 是强相合的。这可视为古典强大数问题从一个角度的推广．与弱大数定律比较起来，强大数律是一个更为困难和有兴趣的问题。在最简单的独立和的情况，弱大数律在本世纪三十年代已有了完满的解决，而一般独立变量序列的强大数律则一直到了七十年代才基本上得到解决。由此不难想象，在一般的线性模型中，回归系数的 LS 估计的强相合问题，是一个颇有难度的问题。关于这个问题，从 1963 年 Eicker 起一直到七十年代中期都没有什么进展．但可堪告慰的是，自七十年代中期以来 Anderson, Taylor[3], Drygas[2], Lai, Robbins, Wei[4], [5]等获得了一些重要的具有突破性的结果．比如[5]中结果（见下文定理1.9）达到了这样深刻的程度：当模型(1.1)满足条件(1.9)时，则条件(1.5)对于 $\hat{\beta}_n$ 的强相合是充分的。由定理1.1知，此时(1.5)是最弱的充分条件。

与此同时，陈希孺对于不包括在上述作者考虑范围内的下面两种重要情况，研究了$\hat{\beta}_n$的强相合性：一是G-M模型，二是$\{e_i\}$的二阶矩为无限的情形（见下文定理1.10，1.11）。

陈桂景于 1980 年在研究 $\hat{\beta}_n$ 的强相合问题时，发现可以把上面的头绪纷繁的所有结果统一在一个包罗广泛的定理之内([12]，[13])．这项工作后来经过美籍学者黎子良的参与，又以文献[14]的形式提了出来，这就是下面的基本定理。应当指出，这个定理的意义不仅在于总结了已有成果，而且还可以得出一些新事实．下面，我们将用这个定理为纲，介绍 LS 估计强相合的主要成果。

称一串随机变量$\{\xi_i\}$为一收敛系统，若对任一串满足条件$\Sigma_1^\infty c_i^2<\infty$的常数$c_i$，有$\Sigma_1^\infty c_i\xi_i$ $a.s.$收敛。

定理1.7 （基本定理，[14]）假定在模型(1.1)中：(i) $\{g_ie_i\}$为一收敛系统，此处$\{g_i\}$为满足条件$|g_1|\geqslant|g_2|\geqslant\cdots>0$的实数列；(ii)对某个$t\in\{1,\cdots,p\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}v_{tt}^{(n)}=0,\text{ 其中 } v_{tt}^{(n)} \text{ 为 } S_n^{-1} \text{的} (t,t) \text{ 元} \tag{1.15}$$

(iii)设f为定义在$(0,\infty)$上的正值函数，使

$$f(x)/x^2\uparrow\infty\quad\text{当}x\downarrow 0\text{且}\int_0^A\frac{dx}{f(x)}<\infty\text{对某 }A>0, \tag{1.16}$$

则当$n\to\infty$时有

$$\hat\beta_{tn}-\beta_t=o\left(f^{\frac12}(v_{tt}^{(n)})\Big/|g_n|\right)\quad\text{a.s.} \tag{1.17}$$

取$f=g^2$，$g_n=g(v_{11}^{(n)})$，由此基本定理可得

定理1.8 （[14]）记号同定理1.7．设函数g定义于$(0,\infty)$，满足条件：

(i) $0<g(x)/x\uparrow\infty$，当$x\downarrow0$；(ii) $\int_0^A\frac{dx}{g^2(x)}<\infty$，对某$A>0$；(iii) $\{g(v_{11}^{(n)})e_n\}$构成收敛系统。又设$\lim\limits_{n\to\infty}v_{11}^{(n)}=0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\hat\beta_{1n}=\beta_1,\quad\text{a.s.} \tag{1.18}$$

又若取$f(x)=x|\log x|^\delta$，当$0<x\leqslant\varepsilon$；$=\varepsilon|\log\varepsilon|^\delta$，当$x>\varepsilon$。其中$\delta>1$任意给定。那么由定理1.7可得

定理1.9 （[5]）．记号同定理1.7，设$\{e_i\}$为一收敛系统，且$\lim\limits_{n\to\infty}v_{tt}^{(n)}=0$，则对任意给定的$\delta>1$，当$n\to\infty$时有

$$\hat\beta_{tn}-\beta_t=o\left((v_{tt}^{(n)}|\log v_{tt}^{(n)}|^\delta)^{\frac12}\right)\quad\text{a.s.} \tag{1.19}$$

注意，二阶矩有界的鞅差序列，均值为0的平稳Gauss序列，…等，都构成收敛系统，可见定理1.9的应用是很广的。

下面的结果首先由陈希孺[6]初步给出，文献[14]利用其基本定理(1.7)给出了另一证明，并给出了收敛速度，对$\{e_i\}$的要求条件也有所减弱。

定理1.10 （[6]，[14]） 设$\{e_i\}$满足条件：$Ee_i=0$，$i=1,2,\cdots$，$Ee_ie_j=0$当$i\neq j$，$\sup\limits_i Ee_i^2<\infty$。又设$\lim\limits_{n\to\infty}v_{tt}^{(n)}=0$，则对任何$\delta>1$，有

$$\hat\beta_{tn}-\beta_t=o\left\{(v_{tt}^{(n)}|\log v_{tt}^{(n)}|^\delta)^{\frac12}\log n\right\}\quad\text{a.s.} \tag{1.20}$$

特别，若对某个$\delta>1$，有

$$v_{tt}^{(n)}=O\{(\log n)^{-2}(\log\log n)^{-\delta}\}, \tag{1.21}$$

则$\hat\beta_{tn}$为β_t的强相合估计。

[14]举例说明，条件(1.21)不能减弱为

$$v_{tt}^{(n)}=O\{(\log n)^{-2}(\log\log n)^{-1}\},$$

即对条件(1.21)已不能作实质性的改进。

下面的结果也由陈希孺[7]首先研究。[14]利用定理1.7也给出了类似结果，且条件比[7]有所减弱简化。

定理1.11 ([7]，[14])。设 $\{e_i\}$ 为鞅差序列，且 $\sup_i E|e_i|^r<\infty$，对某 $r\in[1,2)$。又假定

$$v_{tt}^{(n)}=O\left(n^{-(2-r)/r}\,|\log n|^{-\delta'}\right)\text{对某}\delta'>2/r, \tag{1.22}$$

则当 $n\to\infty$ 时有

$$\hat{\beta}_{tn}-\beta_t=o\left((n^{(2-r)/r}v_{tt}^{(n)}|\log v_{tt}^{(n)}|^{\delta'})^{\frac{1}{2}}\right)\quad \text{a.s.} \tag{1.22}$$

当 $e_1,e_2,\cdots$ 为独立同分布时，利用定理1.7可以给出更好的结果。

定理1.12 ([14]) 设 $a>0,b>0$。F 为定义在 $[a,\infty)$ 上的非降函数，满足条件 $F(a)=b$ 以及

$$H(x)\uparrow\infty,\qquad x^2/H(x)\uparrow\infty\quad\text{当}x\uparrow\infty \tag{1.24}$$

以 G 记作 F 的反函数。设 $e_1,e_2,\cdots$ 为一独立同分布的随机变量序列，满足条件 $E(F(|e_1|\vee a))<\infty$，此处 $c\vee d=\max\{c,d\}$。则以下结论成立：

(i) 若 e_1 的分布以原点对称，则

$$\{\sqrt{n}\,e_n/G(n)\} \tag{1.25}$$

为一收敛系统。

(ii) 若 $Ee_1=0$，且 $\sum_{i=1}^{n}j/G^2(j)=O(n^2/G^2(n))$，则 (1.25) 成立。

(iii) 若 $\sum_{n}^{\infty}j/G^2(j)=O(n^2/G^2(n))$，则 (1.25) 成立。

(iv) 若 (1.25) 成立，且对某 $\delta>1$，有

$$v_{11}^{(n)}=O\left(\frac{n}{G^2(n)}\left|\log\frac{n}{G^2(n)}\right|^{-\delta}\right) \tag{1.26}$$

则有

$$\hat{\beta}_{1n}-\beta_1=o\{(n^{-1}G^2(n)v_{11}^{(n)}|\log v_{11}^{(n)}|^{\delta})^{\frac{1}{2}}\}\quad a.s.$$

对于误差序列为线性过程时，由定理1.7又可得下面结果。

定理1.13([14]) 设模型 (1.1) 中的 $\{e_i\}$ 为一由鞅差序列所产生的线性过程，即存在一个二阶矩有界的鞅差序列 $\{u_i\}$，使 $e_n=\sum_{i=-\infty}^{\infty}c_{n-i}u_i$，其中 $\{c_i\}\in l_2$。记 $\{e_n\}$ 的谱密度为 ψ。则有：

(i) 若对某个 $p>2$ 有 $\sup_i E|u_i|^p<\infty$，且 ψ 在 $(0,2\pi)$ 内的本质上确界有限，则当 $\lim_{n\to\infty}v_{11}^{(n)}=0$ 时有 $\lim_{n\to\infty}\hat{\beta}_{1n}=\beta_1$，$a.s.$。

(ii) 若存在 $r>1$ 及 $\delta>1+\frac{1}{r}$，使 $\int_0^{2\pi}\psi^r(\theta)d\theta<\infty$，$v_{11}^{(n)}=O(n^{-1/r}(\log n)^{-\delta})$，则有 $\hat{\beta}_{m}\to\beta_1$，$a.s.$。

另外，王惠明[15]，何仲洛[16]最近对 $\hat{\beta}_n$ 的强相合问题也作了研究工作。他们在对误差序列、设计点列作了些特殊假定时，得到了关于 $\hat{\beta}_n$ 强相合的较好的结果。

在结束本小节叙述时，我们要指出，虽然在LS估计的强相合性研究方面已经取得了很大进展，但是迄今为止的结果远未达到完整。比如，得到的成果多是关于充分条件方面的，对必要条件知道得不多。要使在一般线性模型中LS估计强相合性研究达到相当于古典强大数定律那样好的结果，还要作很大的努力。

二、误差方差估计的大样本理论

我们仍然考虑线性模型（1.1），并且在本小节中总假定条件（1.9）成立，其中$0<\sigma^2<\infty$为未知的误差方差．沿用记号（1.2），又记

$$V'_{nk}=(v_{nk1},\cdots,v_{nkn})=x'_k(X'_nX_n)^-X'_n$$

$$\xi_{nk}=Y_k-V'_{nk}Y^{(n)},\ k=1,\cdots,n. \tag{1.27}$$

因为研究的大样本性质，不妨设$0<r_n\triangleq R(X'_nX_n)\equiv r$．那么，$\sigma^2$的基于前$n$次观察值残差平方和的无偏估计为（下式中$\{a_{nij}\}$为由$X_n$决定的一组实数，$\sum_{j=1}^n a_{nij}a_{nkj}=\delta_{ik}$）．

$$\hat{\sigma}_n^2=\frac{1}{n-r}\sum_{k=1}^n\xi_{nk}^2=\frac{1}{n-r}\left\{\sum_{k=1}^n e_k^2-\sum_{i=1}^r\left(\sum_{j=1}^n a_{nij}e_j\right)^2\right\} \tag{1.28}$$

下面介绍当$n\to\infty$时关于$\hat{\sigma}_n^2$的相合性及其分布的渐近性质的研究成果．1945年我国杰出的数理统计学家许宝騄教授在[18]中开始了这方面的研究工作．他考虑了（1.1）的特例

$$p=1,\ x_i=1,\ i=1,2,\cdots,\ e_1,e_2,\cdots\text{为}iid, \tag{1.29}$$

这一工作被认为是非独立和渐近理论方面的开创性工作．六十年代以来，这方面的课题受到了一些学者的注意．

（一）$\hat{\sigma}_n^2$的相合性问题　1965年，Gleser[19]在$e_1,e_2\cdots$为iid，以及关于试验点列$\{x_i\}$的某种附加假设条件下证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\sigma}_n^2=\sigma^2$，$a.s.$，即$\hat{\sigma}_n^2$为强相合的．次年，Gleser[20]利用Y. S. Chow的新结果，成功地去掉了加在$\{x_i\}$上的条件．从而，在$\{e_i\}$为iid时，完全解决了$\hat{\sigma}_n^2$的强相合问题．

1979年，陈希孺[21]在只假定$e_1,e_2,\cdots$独立的条件下，得出了$\hat{\sigma}_n^2$的弱相合的充要条件．关于强相合性，他还分别给出了必要条件和充分条件，并猜测其必要条件也是充分的．但[21]关于充分性的论证有一处失误．赵林城[22]纠正了这个失误，并得出了$\hat{\sigma}_n^2$强相合的充要条件．因而在只假定（1.9）成立的条件下，完满地解决了$\hat{\sigma}_n^2$的相合性问题．

定理1.14　（[21]）．在线性模型（1,1）中假定（1.9）成立，那么$\hat{\sigma}_n^2\xrightarrow{P}\sigma^2\ (n\to\infty)$的充要条件是下列二式同时成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{|x|>\sqrt{n}}x^2dP_k=0 \tag{1.30}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\int_{|x|<\sqrt{n}}x^4dP_k=0 \tag{1.31}$$

此外，$P_k(x)$为e_k的分布函数（下同）．

定理1.15　（[22]）．记$U_k=2^{-k}\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}e_j^2$，$k=0,1,2,\cdots$．并用$U_k^s$记$U_k$的对称化的随机变量．当模型（1,1）满足条件（1.9）时，$\hat{\sigma}_n^2\to\sigma^2$，$a.s.$（$n\to\infty$）的充要条件为（1.30），（1.31）以及下式成立

$$\sum_{k=0}^\infty P(U_k^s\geqslant\varepsilon)<\infty \tag{1.32}$$

对任意$\varepsilon>0$．

显然，上述二定理得出的充要条件均与试验点列无关，而且可以验证，Gleser [20]的结果是定理1.15的特例。

（二）$\hat{\sigma}_n^2$ 的分布收敛于正态分布的一致性界限　假定 $e_1, e_2, \cdots$ 独立，四阶矩有限并满足适当条件，可以证明 $\hat{\sigma}_n^2$ 的标准化，即

$$\tilde{\sigma}_n^2 = (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)/\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_n^2)}$$

的分布 $G_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于标准正态分布 $\Phi(x)$，困难的问题在于 G_n 收敛于 Φ 的速度。在许宝騄教授的工作[18]中，解决了特例（1.29），得出了理想的 Berry-Esseen 界限 $O(n^{-\frac{1}{2}})$。嗣后多年这一问题没有实质性的进展。七十年代在研究 U 统计量分布的收敛速度时，曾附带得出：若 $e_1, e_2, \cdots$ 为 $iid.$，且存在常数 $c<\infty$，使 $P(|e_1|\leqslant c)=1$，则

$$\|G_n-\Phi\| \triangleq \sup_x |G_n(x)-\Phi(x)| = O(n^{-\frac{1}{2}}), \tag{1.33}$$

1979年，Schmidt 在[23]中也研究了这一问题。他在 $e_1, e_2, \cdots$ 为 iid 且 $Ee_1^{2m}<\infty$（$m\geqslant 3$ 为整数）的假定下，证明了 $\|G_n-\Phi\| = O(n^{-m/(2m+2)})$。这与理想的 Berry-Esseen 界限相距尚远。

陈希孺[24]进一步研究了这一问题，在 $e_1, e_2, \cdots$ 为 iid 的条件下完满地解决了这一问题：假定 $E(e_1^6)<\infty$，及 $Ee_1^2>0$，则有（1.33）。但对 $\{e_i\}$ 独立但不必同分布的情况，[24]中引进了一项不甚自然的条件，该文猜测此条件可以免去。白志东、赵林城独立地证实了这一猜测，从而园满地解决了这一问题。

定理1.16　（[25]）。设 $g(x)$ 为 R 上非负偶函数，$g(x)$ 及 $x/g(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时为非降函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$。设线性模型（1.1）满足条件（1.9）。又设存在常数 $D_1<\infty$，$D_2>0$，使

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(e_i^4 g(e_i^2)) \leqslant D_1, \tag{1.34}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(e_i^2) \geqslant D_2, \tag{1.35}$$

则存在与 n 无关的常数 $c>0$，使

$$\|G_n-\Phi\| \leqslant c/g(\sqrt{n}). \tag{1.36}$$

特别，若取 $g(x)=|x|$，便得到（1.33）。这就在最弱的条件下得到了理想的 Berry-Esseen 界限。

（三）$\hat{\sigma}_n^2$ 的分布收敛于正态分布的非一致性速度　关于 $\tilde{\sigma}_n^2 = (\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)\Big/\sqrt{\mathrm{Var}\,(\hat{\sigma}_n^2)}$ 的分布 $G_n(x)$ 收敛于 $\Phi(x)$ 的非一致性速度问题，在独立同分布和这一古典情况下，六十年代由Osibov加以研究，其结果被认为是中心极限定理研究方面的重要进展。而对 $\hat{\sigma}_n^2$ 这样非独立和的情况，问题就困难得多。但赵林城、陈希孺[26]在得到一致性速度 $O(n^{-\frac{1}{2}})$ 的同样条件下解决了这一问题。结果如下：

定理1.17　设在模型（1.1）中，$\{e_i\}$ 为 $iid.$，且 $E(e_1^6)<\infty$，$\mathrm{Var}(e_1^2)>0$ 则存在与 n 及 x 无关的常数 $c>0$，使对所有的 n 和 x，有

$$|G_n(x)-\Phi(x)|\leqslant cn^{-\frac{1}{2}}(1+|x|)^{-3} \tag{1.37}$$

（四）σ^2 的学生氏估计量依分布收敛速度　从统计应用的角度来看，$\hat{\sigma}_n^2$ 的渐近分布还不能直接用于σ^2的大样本推断问题，因为 $Var(\hat{\sigma}_n^2)$ 包含了模型中之未知因素．解决这个困难的一个办法是寻找 $Var(\hat{\sigma}_n^2)$ 的一个适当的估计 $\widehat{Var(\hat{\sigma}_n^2)}$，以此来代替 $Var(\hat{\sigma}_n^2)$ 而得到所谓“学生化 $\hat{\sigma}_n^2$”：

$$\tilde{\tilde{\sigma}}_n^2=\frac{(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)}{\sqrt{\widetilde{Var(\hat{\sigma}_n^2)}}}.$$

陈希孺在[28]中提出了 $Var(\hat{\sigma}_n^2)$ 的一个适当的估计，并利用此估计作出一个学生化的 $\hat{\sigma}_n^2$，并讨论了其分布收敛于正态的速度，得出了初步结果．赵林城在[29]中进一步研究了这一问题，大大改进了陈的上述结果，且这个结果在矩的要求上已达到很难改进的地步．

定理1.18　（[29]）．设在线性模型（1.1）中条件（1.9）成立，且存在常数 $c_1>0$，使

$$D_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Var(e_k^2)\geqslant c_1 \tag{1.38}$$

$$\sup_n E(e_n^8)<\infty \tag{1.39}$$

记

$$\hat{D}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_{nk}^4-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_{nk}^2\right)^2 \tag{1.40}$$

$$W_n=\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)/\hat{D}_n, \tag{1.41}$$

其中 ξ_{nk} 如（1.27）所示．记 W_n 的分布为 H_n，则

$$\|H_n-\Phi\|=O(1/\sqrt{n}). \tag{1.42}$$

（五）关于 $\hat{\sigma}_n^2$ 的标准化的分布函数 $G_n(x)$ 的渐近展开　这一问题即使在古典的独立同分布和的场合也是一个困难问题，其严格处理直到六十年代才由 Osibov 等给出．在 $\hat{\sigma}_n^2$ 这样非独立和的情况下，问题更为复杂．许宝騄教授在[18]中对特例（1.29）成功地解决了这一问题．嗣后，这方面的工作一直没有什么进展．赵林城在[30]中研究了这个问题，其结果包含了文献[18]中讨论的情况．不过，由于[30]对试验点列$\{x_i\}$加上了较强的条件，所以这些结果还只能是初步的．

定理1.19　设在线性模型（1.1）中，$\{e_i\}$为$iid.$，$P(x)=P(e_1\leqslant x)$ 在 Lebesgue 意义下是非奇异的，即$P(x)$ 的Lebesgue分解中绝对连续部分不恒为 0，且对某个整数 $k\geqslant 4$，$\alpha_{2k}<\infty$，此处记$\alpha_j=E(e_1^j)$．又设有常数$A>0$，使对所有的 $1\leqslant j\leqslant n$，$n=1,2,\cdots$，有 $\sum_{i=1}^r d_{nij}^2\leqslant A$，其中 $d_{nij}=\sqrt{n}\,a_{nij}$．令

$$\eta_n=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^n e_i^2-\sum_{i=1}^r\left(\sum_{j=1}^n a_{nij}e_j\right)^2\right], \tag{1.43}$$

$$G_n(x)=P\left(\frac{\sqrt{n}(\eta_n-1)}{\sqrt{\alpha_4-1}}\leqslant x\right). \tag{1.44}$$

则

$$G_n(x)=\Phi(x)+\Psi_n(x)+R_n(x),\tag{1.45}$$

此处，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$\Psi_n(x)$ 是导数 $\Phi^{(\gamma)}(x)$（$\gamma=1,2,\cdots,3(k-3)$）的线性组合，组合系数是某些量的 $n^{-\gamma/2}$ 倍（$\gamma=1,\cdots,k-3$），这些量仅依赖于 k, r, α_3, $\alpha_4,\cdots,\alpha_{2k-2}$ 及 d_{nij}（$1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant\gamma$），且

$$R_n(x)=\begin{cases}Q_{k,r}n^{-(k-2)/2}, & \text{当 } 4\leqslant k\leqslant 2(\gamma+2)/\gamma,\\ Q_{k,r}n^{-k(k-1)/(2k+\gamma+2)}, & \text{当 } k>2(\gamma+2)/\gamma\end{cases}\tag{1.46}$$

此处，$Q_{k,r}$ 是仅依赖于 k，γ 及分布 $P(x)$ 的一个常数。

三、线性模型参数估计的可容许性理论

本小节是小样本理论（即 n 固定），因此将线性模型（1.1）记为矩阵的形式

$$Y=X\beta+\varepsilon\tag{1.47}$$

其中 X 为已知的 $n\times p$ 矩阵。假设 $E\varepsilon=0$，$Var(\varepsilon)=\sigma^2V$，$V>0$ 已知，那么模型（1.47）中的未知参数为 $\theta=(\beta,\sigma^2)$。

设 $Y\sim P_\theta$，$\theta\in\Theta$，欲估计 $g(\theta)$，损失函数为 $L(g(\theta),d)$。称 $R(\theta,\delta)=EL(g(\theta),\delta)$ 为估计 δ 的风险。若对一切 $\theta\in\Theta$ 有 $R(\theta,\delta_2)\geqslant R(\theta,\delta_1)$，且至少有一个 $\theta_0\in\Theta$ 使严格不等式成立，则称 δ_1 一致优于 δ_2。若不存在一致优于 δ_0 的估计，则称估计 δ_0 是可容许的。若 $\mathscr{A}$ 为 $g(\theta)$ 的一个估计类，$\delta_0\in\mathscr{A}$，且在 $\mathscr{A}$ 中不存在一致优于 δ_0 的估计，则 δ_0 在 $\mathscr{A}$ 中是可容许的。

（一）矩阵损失下回归系数的线性估计的可容许性　设 $S\beta$ 为可估函数。鉴于 $S\beta$ 的最重要的估计量是观测值 Y 的线性函数，于是我们着重考虑 $S\beta$ 的线性估计类

$$\mathscr{L}=\{LY：L\ \text{为行数与}\ S\ \text{行数相同的常数阵}\}.$$

对于二次损失函数 $(d-S\beta)'(d-S\beta)$，文献[31]给出了 $S\beta$ 的估计在 $\mathscr{L}$ 中是可容许的充要条件。Rao 还在[31]中提出了矩阵损失函数

$$(d-S\beta)(d-S\beta)'/\sigma^2.\tag{1.48}$$

在此损失下，称 δ_1 一致优于 δ_2，如果对一切 β,σ^2，有 $E(\delta_1-S\beta)(\delta_1-S\beta)'/\sigma^2\leqslant E(\delta_2-S\beta)\cdot(\delta_2-S\beta)'/\sigma^2$，且存在 β_0，σ_0^2 及常数向量 α，使得

$$\alpha'E(\delta_1-S\beta_0)(\delta_1-S\beta_0)'\alpha/\sigma_0^2<\alpha'E(\delta_2-S\beta_0)(\delta_2-S\beta_0)'\alpha/\sigma_0^2.$$

Rao 又指出：若在二次损失下，δ 是可容许的，则在矩阵损失下亦然。他还指出：对于 $S\beta$ 的线性估计 LY，有

$$E(LX\hat\beta-S\beta)(LX\hat\beta-S\beta)'\leqslant E(LY-S\beta)(LY-S\beta)'$$

对一切 β，σ^2，并且等号对一切 β，σ^2 成立的充要条件 $L=LXT^-X'V^{-1}$，此处 $\hat\beta=T^-X'\cdot V^{-1}Y$，$T=X'V^{-1}X$，下同。

吴启光[32]在损失（1.48）下进一步给出了 $S\beta$ 的一个估计在 $\mathscr{L}$ 中可容许的充要条件。

定理1.20　（[32]）设在模型（1.47）中 $S\beta$ 可估，则在损失（1.48）下，LY 是 $S\beta$ 在 $\mathscr{L}$ 中可容许估计的充要条件是：(i) $L=LXT^-X'V^{-1}$；(ii) $LX=S$，或者 $LX\neq S$ 时，对任 $a\in(0,1)$，下式不成立

$$2LXT^-X'L'-ST^-X'L'-LXT^-S'-(1-a)(LX-S)T^-(LX-S)'\geqslant 0 \qquad (1.49)$$

文献[32]还指出了(1.49)式对一切$a\in(0,1)$不成立的充要条件。

（二）*误差方差的二次型估计的可容许性*　关于误差方差σ^2的估计的可容许性问题，即使对于$X=(1,\cdots,1)'$，$\mathscr{E}=(e_1,\cdots,e_n)'\sim\mathscr{N}(0,\sigma^2I_n)$这样简单情况，到目前为止也所知很少。就$\sigma^2$的性质来说，最自然的估计应是$Y$的二次型，事实上，许宝騄教授[33]于1938年就研究了线性模型中误差方差σ^2的二次型最优无偏估计，获得了充要条件。他的工作启示我们，在讨论σ^2的可容许性估计时，可先把注意力放在估计类$\mathscr{Q}=\{Y'AY:A\geqslant 0\}$上。吴启光、成平、李国英在文献[34]，[35]中研究了这个问题。现将所得结果概述如下：

在模型(1.47)中，记$\mathscr{E}=(e_1,\cdots,e_n)'$，并假设$e_1,\cdots,e_n$相互独立，$Ee_i=0$，$Ee_i^2=\sigma^2$，$Ee_i^3=0$，$Ee_i^4=3\sigma^4$，$i=1,\cdots,n$。并取估计$\sigma^2$的损失为$\sigma^{-4}(d-\sigma^2)^2$。为简明计，把这些假设和约定记为$\Omega_1$。

定理1.21　在条件Ω_1下，若X为满秩方阵，则$Y'AY$在$\mathscr{Q}$中是σ^2的可容许估计的充要条件是

$$2\lambda_1+\mathrm{tr}A\leqslant 1,$$

此处λ_1为A的最大特征根。

系　若$Y\sim N(X\beta,\sigma^2V)$，$V>0$已知，其它条件同定理1.21，则$Y'AY$在$\mathscr{Q}$中是$\sigma^2$的可容许估计的充要条件是$2\lambda_1+\mathrm{tr}AV\leqslant 1$，其中$\lambda_1$为$V^{\frac{1}{2}}AV^{\frac{1}{2}}$之最大特征根。

定理1.22　在条件Ω_1下，设$r=\mathrm{rank}(X)<n$。若$Y'AY$在$\mathscr{Q}$中是σ^2的可容许估计，则它必有如下形式：

$$aS^2+\hat\beta'X'BX\hat\beta\doteq aY'(I-P_X)Y+Y'P_XBP_XY,$$

此处$S^2=Y'(I-P_X)Y$，$P_X=X(X'X)^-X'$，$\hat\beta=(X'X)^-X'Y$，(以下同)，$a>0$，$B\geqslant 0$，而且a和B满足：当$P_XBP_X=0$时，$a=(n-r+2)^{-1}$；当$\mathrm{rank}(P_XBP_X)=q\geqslant 1$时，$P_XBP_X$的非零特征根$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_q>0$和$a$必须满足

$$(n-r)a+\textstyle\sum_1^q\lambda_i+2\max\{a,\lambda_1\}\leqslant 1,$$

$$-(n-r+2)a^2+a+2(n-r+2)a\lambda_q-\textstyle\sum_1^q\lambda_i^2-2\lambda_q+2\lambda_q\sum_1^q\lambda_i\geqslant 0.$$

定理1.23　在条件Ω_1'之下，并设$r=\mathrm{rank}(X)<n$，我们有

1°　设m和V分别是随机向量$(z_1^2,\cdots,z_q^2)'$ $(1\leqslant q\leqslant r)$的均值向量和协方差阵，

$$C=\begin{pmatrix}(n-r)(n-r+2) & (n-r)(\mathbf{1}+m)' \\ (n-r)(\mathbf{1}+m) & 2I+4\mathrm{diag}(m_1,\cdots,m_q)+(\mathbf{1}+m)(\mathbf{1}+m)'+V\end{pmatrix}$$

若$(a,\lambda_1,\cdots,\lambda_q)C(a,\lambda_1,\cdots,\lambda_q)'-2(n-r)a-2(\mathbf{1}+m)'(\lambda_1+\cdots+\lambda_q)'+1$在$\{(a,\lambda_1,\cdots,\lambda_q):0\leqslant a\leqslant 1,\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ i=1,\cdots,q\}$中的最小值在$(a_0,\lambda_{10},\cdots,\lambda_{q0})$处达到，则当$P_XBP_X$ $(B\geqslant 0)$的非零特征根恰是$\lambda_{10},\cdots,\lambda_{q0}$中的非零者时，$a_0S^2+\hat\beta'X'BX\hat\beta$是$\sigma^2$在$\mathscr{Q}$中的可容许估计。

2°　若a及P_XBP_X $(B\geqslant 0)$的非零特征根$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_q>0$满足$a\geqslant\lambda_1$，$(n-r+2)a+\sum_1^q\lambda_i=1$，则$aS^2+\hat\beta'X'BX\hat\beta$是$\sigma^2$在$\mathscr{Q}$中的可容许估计。

3° $(n-r+2)^{-1}S^2$是σ^2在$\mathscr{Q}$中的可容许估计，而且是$\mathscr{Q}$中的唯一的minimax估计。

4° 若$B\geqslant 0$，$\mathrm{rank}(P_XBP_X)=1$，λ是P_XBP_X的非零特征根，则在$\mathscr{Q}$中$aS^2+\hat{\beta}'X'BX\hat{\beta}$是$\sigma^2$的可容许估计的充要条件是：

$$a>1,\quad -(n-r+2)a^2+a+2(n-r+2)a\lambda+\lambda^2-2\lambda\geqslant 0,\quad (n-r+2)a+\lambda\leqslant 1.$$

注　在条件Ω_1下，若$X=\mathbb{1}=(1,\cdots,1)'$，$n\geqslant 2$，则$Y'AY$在$\mathscr{Q}$中是$\sigma^2$的可容许估计的充要条件是$Y'AY$为如下形式：$a\sum_1^n(Y_i-\bar{Y})^2+nb\bar{Y}^2$，此处$(Y_1,\cdots,Y_n)'=Y$，$\bar{Y}=n^{-1}\sum_1^n Y_i$，$a$，$b$满足条件：(i) $a=(n+1)^{-1}$，$b=0$或者(ii) $a\geqslant b>0$，$(n+1)a+b\leqslant 1$，$-(n+1)a^2+a+2(n+1)ab-2b+b^2\geqslant 0$。

系　若$Y\sim N(X\beta,\sigma^2A)$，$A>0$已知，损失函数取为$\sigma^{-4}(d-\sigma^2)^2$，则在定理1.23中，以$A^{-\frac{1}{2}}Y$代替$Y$，以$A^{-\frac{1}{2}}X$代替$X$，以$A^{-\frac{1}{2}}X(X'A^{-1}X)^{-}X'A^{-\frac{1}{2}}$代替$P_X$，定理的结论仍然成立。

定理1.24　若$Y\sim N(X\beta,\sigma^2V)$，$V>0$已知，损失函数为$(d-\sigma^2)^2$，则对于任意满足$\mu(C)\subset\mu(X)$的矩阵$C$，有

$$(n+2)^{-1}Y'(V^{-1}-V^{-1}CA^{-1}C'V^{-1})Y$$

是σ^2的可容许估计，此处$A=C'V^{-1}C+B$，$B>0$任意。

（三）二阶原点矩的二次型估计的可容许性　本段考虑特殊的线性模型：在(1.47)中令$X=(1,\cdots,1)'=\mathbb{1}$。欲估计$\beta^2+\sigma^2$。把前面假设$\Omega_1$中损失函数改为$\sigma^{-4}(d-\beta^2-\sigma^2)^2$。我们把这些假设简记为$\Omega_2$。成平等在[36]中给出下面一些结果。

定理1.25　在假定Ω_2下，我们有

(1) 若$n=1$，则在$\mathscr{Q}$中bY^2是$\sigma^2+\beta^2$的可容许估计的充要条件是$\frac{1}{3}\leqslant b\leqslant 1$。

(2) 若$n\geqslant 2$，则$Y'AY$在$\mathscr{Q}$中是$\sigma^2+\beta^2$的可容许估计的充要条件是$Y'AY$为如下形式：

$$a\sum_1^n(Y_i-\bar{Y})^2+nb\bar{Y}^2,$$

此处$\bar{Y}=n^{-1}\sum_1^n Y_i$，$a$，$b$满足：(i) $a=n^{-1}(n+1)^{-1}(n-1)$，$b=n^{-1}$；或者(ii) $n^{-1}>b\geqslant a>0$，$(n+1)a+b=1$；或者(iii) $a>0$，$0<b<n^{-1}$，$(n+1)a+b>1$，$-n(n+1)a^2+(n-1)a+2n(n+1)ab-(2n-1)b+nb^2\geqslant 0$。

定理1.26　若$Y\sim N(\mathbb{1}\beta,\sigma^2V)$，$V>0$已知，则在损失函数$\sigma^{-4}(d-\beta^2-\sigma^2)^2$下，对于任意$c\in[0,1)$，

$$(n+2)^{-1}g^{-1}\{(g+c)\tilde{S}^2+g^{-1}[(n+1)c^2-(g-1)c+g](\mathbb{1}'V^{-1}Y)^2\}$$

是$\beta^2+\sigma^2$的可容许估计，此处$g=\mathbb{1}'V^{-1}\mathbb{1}$，$\tilde{S}^2=Y'[V^{-1}-g^{-1}V^{-1}\mathbb{1}\mathbb{1}'V^{-1}]Y$。

（四）一、二阶矩同时估计的可容许性　吴启光在文献[37]中给出的主要结果如下：在（二）中所考虑的线性模型中，当$X=\mathbb{1}$，$n\geqslant 2$时，在两种类型的二次损失函数下，分别给出了(β,σ^2)和$(\beta,\sigma^2+\beta^2)$的估计在

$$\mathscr{D}=\{(l'Y,Y'AY):\ l\text{为}n\text{维向量},\ A\geqslant 0\}$$

中是可容许的充要条件；对于一般的X和二次损失函数，给出了$(S\beta,\sigma^2)$的一类可容许估计。

参考文献

[1] Eicker, F., AMS (1963), 447.

[2] Drygas, H., Z. Wahrsch. Verw. Gebiete (1976), 119.

[3] Anderson, T. W., Taylor, J. B., AS (1976), 788.

[4] Lai, T. L., And Robbins, H., Proc. Nat. Acad. Sci. VSA, (1977), 2667.

[5] Lai, T. L., Robbins, H., And Wei,C. Z.,Multivariate Anal. (1979), 343.

[6] 陈希孺, Sci. Sinica., Special Issue (1979), 162.

[7] 陈希孺，科学通报，1979年第6期，241.

[8] 陈希孺，数学年刊，1981年第1期，131.

[9] 陈希孺，数学学报，1981年第1期，36.

[10] 陈桂景，数学年刊，4A(5)，1983，657.

[11] 白志东，科学探索（1982），第2期，81.

[12] 陈桂景，安徽大学学报（自然科学版），1980年，第2期，23.

[13] 陈桂景，On generalization of Lai-Robbins-Wei's Theorem.（已投应用数学学报）.

[14] 陈桂景，黎子良，魏庆荣，J. Multivariate Annal. (1981) 319.

[15] 王惠明，缺差强大数律及回归系数LS估计的强一致性.（研究生毕业论文）.

[16] 何仲洛，线性模型中回归系数的最小二乘估计的强相合性，（已投《数学年刊》）.

[17] 陈希孺，陈桂景，吴启光，赵林城，线性模型中参数估计理论（书稿已交科学出版社）.

[18] 许宝騄，AMS (1945), 1—29.

[19] Gleser, L. J., AMS (1965) 463—467.

[20] Gleser, L. J., AMS (1966), 1053—1055.

[21] 陈希孺，中国科学 11 (1979), 1039—1050.

[22] 赵林城，中国科学（1981），第10期，1187—1191.

[23] Schmidt, M. H., Mathematische Operations - forschung und Statistik, (1979), 209—236.

[24] 陈希孺，中国科学（1981），第2期，129—140.

[25] 白志东，赵林城，陈希孺，Convergence rates of the distributions of error variance estimates in linear models（Ⅰ），数学研究与评论，Vol. 3, No. 1, (1983), 69—82.

[26] 赵林城，陈希孺，中国科学，1982年第5期.

[27] Callaert, H. and Veraverbeke, N., AS (1981), 194—200.

[28] 陈希孺，Convergence rates of the distributions of error variance estimates in linear models（Ⅱ）（已投科学探索）.

[29] 赵林城，线性模型中误差学生氏估计量依分布收敛速度（已投数学学报）.

[30] 赵林城，线性模型中误差方差估计的分布的渐近展开，数学学报，1982，6，680—697.

[31] Rao. C. R., AS (1979), 1023—1037.

[32] 吴启光，矩阵损失下回归系数的线性估计的可容许性，科学通报，1982，14：833—835.

[33] 许宝騄，*Stat. Res. Mem.* (1938), 2, 91—104.

[34] 吴启光，成平，李国英，线性模型中误差方差的二次型估计的可容许性问题，中国科学，1981年7月，815—825.

[35] 吴启光，成平，李国英，系统科学与数学，1981年1（2），112—127.

[36] 成平，吴启光，李国英，二阶原点矩的二次型估计的可容许性，应用数学学报，1983，1：18—28.

[37] 吴启光，一，二阶矩同时估计的可容许性（已投系统科学与数学）.