第3卷 第4期 1983年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.3 No.4 Oct. 1983

评樊映川等编的《高等数学讲义》*

徐贤议

（长春地质学院）

同济大学樊映川等所编《高等数学讲义》是我国一部享有盛誉的高等学校数学教材。它在1958年初版，1964年再版，1982年又印一版，前后持续二十多年，发行量很大，一直畅销不衰。正式采用它为课本的高等院校（包括电视大学）也很多，所以是部很有影响的名著；下面简称为《讲义》。

我曾多次听到一些教师称颂此书，说它“文字明白流畅，学生们自己读得懂，能予习；教起来也不费劲，不会出什么麻烦问题；末了，考试成绩也往往比较好.”换言之，采用此书，学生能不教自明，不致背什么教学质量问题的包袱。我因而怀着很大的敬意，认真地去读了它，读后，发现此书问题不少，应说出来，消除其已产生与将产生的不良影响.

评论一部教材。应当从几方面着眼：第一，是教育和教学方面，看它的教学效果；第二，是科学性方面，看其所“讲”何“义”，在科学上是否正确；第三，还要结合当前的形势和任务，从发展上看它的作用是否促进。同济大学李国豪校长在1982年第10期《高教战线》第11页中说：“我国教育战线，特别是高等教育战线，和社会主义建设各条战线一样，建国以来取得了巨大的成就，但是也有失误。其中一个值得吸取的经验教训是要重视自己的经验和正确学习外国。五十年代，在我国着手改革旧教育制度，建立社会主义教育体系时，囿于特定的历史条件，解放前高等教育和欧美的某些可取的经验被忽视了。一度照抄一个国家，连外文也全国限于一种。其后果和影响，我们都有深切的感受。至于十年浩劫对高等教育毁灭性的破坏，更是“左”倾错误造成的一场灾难.”李校长这里指出来的问题是实在的。《讲义》这部教材，早在五十年代，已经给人以“苏联框框”的印象，还有人认为它是苏联 Бермант《数学解析教程》（有张理京译本）的翻版*)。说清楚，“苏联框框”不一定是贬义词，只是说它太象苏联书了.Бермант 的书有其优点，只是不如 Смирнов(В. И.)的《高等数学教程》严密、正确。

平心而论，《讲义》相对于从五十年代到七十年代这些年中我国高等教育的一些失误和灾难而言，却表现出很强的适应性。其所以如此，说穿了，就在**要求低**三个字中。这部书对于微积分教学中的许多难点，不是分散消化它们，不是深入浅出，而是有意迴避，蜻蜓点水，浅入浅出。甚至于予先防备学生往难解决的问题上去想，无怪乎就“不会出什么麻

*1983年3月2日收到.

*) 我不全同意此说.

烦问题”了。书写得干净、利索，念过后就能算题，习题也不难，皆大欢喜。习惯于注入式教学的老师对这课本没意见。若讲启发式和独立思考，那就不合适了。归结于一句话：**这书对于理性思维是不够重视的**。下面举一些例子：

(1) 在证完序列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在并 $=e$ 之后，函数极限 $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$ 述而不证。这是危险的，犹如从 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$ 不能推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\pi x=0$。要证明上述 e 的式子，其实也是容易的。

(2) 关于未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的 l' Hospitale 法则述而不证。

(3) 二元函数混合偏导数交换微分次序的定理不作为定理形式，只凭经验，述而不证。

(4) Jacobi 式(函数行列式)不该不讲。

(5) 隐函数存在定理不该不讲。

(6) 用 Dirichlet 条件的 Fourier 级数收敛定理述而不证。这个定理太重要了，证明虽难些，不好换个容易证明的条件吗？(例如逐段光滑)*)

学数学不可光靠接受知识死记硬背。纵观自古以来全部数学历史，理性认识、逻辑论证始终占主要地位，这个传统是绝对不可废的，忽视理性论证就是取消理论。当然，论证过难，可以暂时不证；然而不证就不够资格称为定理，要不然，人们费那么大力气去证明 Goldbach 猜想和四色定理做什么？马克思在《数学手稿》中把微积分创立的胜利直接唤作“理性的伟大胜利”。教微积分的老师们怎么可以忽视理性认识而倒向经验主义、甚至信仰主义！我不是哲学家，但凭常识也知道，科学理性和信仰主义从来是针锋相对，它们是不两立的。科学教育要使学生理解而不是信仰，科学的信念是在理解的基础上产生的，在教学中就要使学生习惯于**严谨治学**，不过不必过分的严格，心要细而判断要确。述而不证之处太多是不利于养成严谨的学风的。以上六例，只是一小部份而已。

就在已经有证明的定理中间，也还有的证明偏重于形式，而在使学生真正理解方面着力太少。Lagrange 中值定理的证明，一上来就是作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

这个证明的写法无可非议。不过有教学经验的教师都知道，上课可不能这么讲。这个辅助函数必须从图形入手，参照 Rolle 定理，用图形减法找到一个满足 Rolle 条件的函数，然后下面的推理就不讲也行了。要知道构成这个辅助函数这一步才是“分析”，必须先分析问题，才能解决问题，一般推理过程学生会看书，构成辅助函数才是功夫。难点不可避开，要抓住它、消化它，容易的就好办了。固然这是教学法的话，但教材却只用加一个插图也就改进了。

上海是我国明代大科学家徐光启(1562—1633)的故乡。他活着的年代还在微积分创立之前。我在北师大中文系编的北京市自学考试课本《大学语文》181页上读到他的《刻几何原

---

*) 可参考龙季和译的 Толстов 所著《福里哀级数》(商务1955年版)。

本序》(1607年在北京刻行)中引利玛窦的话说："先生曰：是书(指《几何原本》)也，以当百家之用，庶几有羲和[1])、般、墨[2])其人乎，犹其小者．有大用于此，将以习人之灵才，令细而确也．"此话是说，这本书有一种大用处，可以利用它来训练人的聪明才智，使人们的思维细密而确切．大约四百年前的徐光启对数学的这个见解是多么正确呀！培养人的理性思维能力是数学教育的光荣任务．正因此，数学才成为基础科学的基础．忽视理性认识是教学指导思想上的大错误，这是万万不可以的．《实践论》对此已有阐述．

由于忽视理性认识，《讲义》对于许多基本概念的说明也就很含混而不严肃．最最突出令人惊讶不已的是对于不定积分概念的说明，见上册第二篇第七章，在§7.1中用黑体字印着"**函数 $f(x)$ 的所有原函数的全体叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx$．**"可是，这本来是指的 $F(x)+C$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，而 C 是任意常数．我发现这个说法时，担心它可能来源于翻译苏联教材中的翻译错误．马上去查 Смирнов《高等数学教程》和 Фпхценгольц 的《微积分学教程》．这两部书的说法一样，都是"原函数的一般表达式．"这说法是对的．反之，"原函数的全体"就是错的了．这里主要的错误是把"一般"当成了"全体"．

逻辑上说明一个概念，有所谓"内涵"与"外延"．相对于一个无限集，通常用集中元素的公共内涵来说明一般概念，而不用外延的列举法来说明．至于"全体"，则其内涵比任何一个元素都丰富，因为它是"总和"．拿集论的运算作比喻，一般概念的内涵就是各元素内涵之"交"；"全体"概念的内涵首先是一个"集"，其外延则是各元素外延之"并"．这该算逻辑的起码知识．科学语言不允许把"一个中国人"(一般概念)说成"所有中国人的全体"(有十亿多！)．难道这道理还深吗？所以上述不定积分概念的说法，其错误是很严重的．它比定理或公式的错误要大，因为这是基本概念的错误，混淆了"一般"和"全体"，抛弃了逻辑上严肃的原则[*])．

我接着又去查了 Бермант 的书，那上面的说法很噜嗦，先说 $f(x)$ 的一个原函数加上任意常数的 $F(x)+C$ 是"把 $f(x)$ 的全体原函数都包括进去的表达式"，而后说 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)dx$ 就是这个表达式．这虽噜嗦，究竟还不是错误．于此可见，《讲义》是受了 Бермант 的一些影响的，但不是"翻版"，《讲义》单是第二版就发行了四百万部，还有天津大学、四川大学的数学教材，及王连祥和厦门大学许多同志合编的《数学手册》等较晚出的书中，对不定积分概念都和《讲义》的错误说法一样．尤其令人震惊的是统编高中数学教材第四册 143 页上也用了这种说法，所以更正错误、消除影响、认真对广大师生负责，实为当务之急．

应当看到《讲义》的指导思想，在十年动乱时期虽然有过一定的适应性，但向前看，它已经很不适应新形势了．它只求学生"接受"而不求理解，有碍发展能力，使他们学习上模糊不扎实．那对于学生学习后继课程都起消极作用，更谈不上培养学生的创造性了．这

---

[1]) 羲和是唐尧时掌管天地四时的官．

[2]) 般、墨是公输般(鲁般)与墨子，精于器械制造的几何学家．

[*]) 形式逻辑和辨证逻辑的关系就象初等数学和高等数学的关系，是初级高级之别．有人把形式逻辑看成辨证法的对立面，想取消它．这种观点是形而上学的，那才真正是辩证法的对立面．

样，会塞聪遮明，决非培养现代化建设人才之道。上述不定积分概念的错误，只是最突出的一例；概念不当之处还有不少，如前举六端中的(1)，也是概念不清之故；多元函数极限概念也不清楚(如一点邻域内函数不全有定义时怎么办?)，这里不一一列举了。只再提一个非常重要的例子如下：

《讲义》下册讲线积分时，用功的概念引出对坐标的线积分，用物质曲线的质量引出对弧长的线积分，并说明对弧长的线积分与曲线的指向无关，曲线反向时积分不变号。这两种线积分概念同时讲，不细推敲还则罢了，一细推敲就分不清界限了。因为，对弧长的线积分$\int_C f(x,y)ds$中，$f(x,y)$只是"函数"，此外未加限制。至于曲线C应满足什么条件未讲还算小事(粗浅点，应要求"逐段光滑")。现在，用向量形式写对坐标的线积分，注意$\frac{d\vec{\gamma}}{ds}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}=\vec{\tau}$是曲线上的单位切线向量，得

$$\int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_C \vec{A}\cdot d\vec{\gamma} = \int_C \vec{A}\cdot\frac{d\vec{\gamma}}{ds}ds = \int_C A_t ds,$$

其中$A_t=\vec{A}\cdot\vec{\tau}$是向量$\vec{A}$在$C$上的切线分量，它是在$C$上有定义的位置函数。上式右边$\int_C A_t ds$是"对弧长的线积分"吗？如果说是，那么当曲线反向时，左边变号，右边不变号，岂不自相矛盾？若说它等于零，则用到力学上，把$\vec{A}$看成力场，那么不论力场如何，不论怎么运动，总不作功，岂不荒唐！如果考虑到A_t是切线分量，曲线反向时切线向量$\vec{\tau}$也反向，上式右边也变了号，这里的矛盾是解决了，但"对曲线弧的线积分当曲线反向时不变号"的话又不对了。所以定义中只说$f(x,y)$是"函数"不够，还必须加限制："这是个与曲线指向无关的函数"。这样，上式中右边的形式不算"对弧长"的，仍旧是"对坐标"的。由于积分变量可以任意置换，我总觉得"对坐标"(第二类)、"对弧长"(第一类)这种名称不妥。该怎么叫，还请高明指教*)。这里定义要改清楚，而条件与结论不清楚又是比不证还严重的错误。

《讲义》以工业性院校采用居多。有一种论调认为工科数学要求不必严格，普通问题会算就行了。我认为工科数学虽不能和数学系要求相比，但严谨的精神不可无，不可陷入狭隘的实用主义。尤其是要**言之成理、概念清晰**。不然的话，会弄坏了学风，遗害无穷。我们必须把低要求提高，注意开发学生的智能，争取数学教育的现代化，迎头赶上去。希望有识之士，严肃地编写出较完善的数学教材来，并望注意，这首先是**端正教学指导思想**的问题，不**要简单地看**成技术问题。

---

*) 或者建议以"有向""无向"区别之，如何？