第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质*

朱 俊

（苏州大学数学系）

§1 引 言

刘应明在[1]中定义了拟仿紧和狭义拟仿紧空间用于推广次仿紧和弱仿紧空间。高国士在全国芜湖拓扑学学术会议上提到：θ-加细空间是拟仿紧空间，反之不然；但拟仿紧与弱θ-加细的关系不明。本文证明了拟仿紧是严格强于弱θ-加细的性质，从而解决了上述问题。另外还证明了狭义拟仿紧是介于θ-加细和弱$\bar{\theta}$-加细之间的性质，并且利用狭义拟仿紧的概念，改进了J. K. Boone[2]的定理3.1。

以下用$\mathscr{U}^*$表示集族$\mathscr{U}$的所有元素的并集。文中拓扑空间的定义可见[1]和[4]。

§2 拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质

定理1 拟仿紧空间是弱θ-加细空间。

证明 设$\mathscr{U}$是拟仿紧空间X的任一开复盖，则有σ-相对离散加细复盖$\mathscr{P}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}_n$。现在我们归纳地作出$\mathscr{U}$的弱$\theta$-加细复盖。$\mathscr{P}_1$是$X$的离散集族，从而对任一$P\in\mathscr{P}_1$及$x\in P$存在开邻域$V(x)$，使$V(x)$仅与$\mathscr{P}_1$中一个元素相交，记$V(P)=\bigcup\limits_{x\in P}V(x)$，由于$\mathscr{P}_1$加细$\mathscr{U}$，故有$U(p)\in\mathscr{U}$，使$p\subset U(p)$，令$B(p)=V(p)\cap U(p)$，$\mathscr{B}_1=\{B(p)\mid p\in\mathscr{P}_1\}$，则显然$\mathscr{B}_1^*\supset\mathscr{P}_1^*$且对任一$x\in\mathscr{P}_1^*$，存在$P_0\in\mathscr{P}_1$使$x\in P_0$，若$P\neq P_0$则$B(p)\cap P_0=\phi$，故$x\notin B(p)$，即$\mathscr{B}_1$在$x$处是点有限的，从而$\mathscr{B}_1$在$\mathscr{P}_1^*$中是按点有限的。假定$\mathscr{B}_n$已作出，满足（1）$\mathscr{B}_n^*\supset\mathscr{P}_n^*-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$，（2）$\mathscr{B}_n$在$\mathscr{P}_n^*-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$中是按点有限的。由于$\mathscr{P}_{n+1}$相对于$X-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$离散，故$\mathscr{P}'_{n+1}=\{P-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*\mid P\in\mathscr{P}_{n+1}\}$在$X-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$中离散，同$\mathscr{B}_1$的构作一样，存在$X-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$中的加细$\mathscr{U}$的开集族$\mathscr{B}'_{n+1}=\{B'(p')\mid p'\in\mathscr{P}'_{n+1}\}$使$\mathscr{B}'^*_{n+1}\supset\mathscr{P}'^*_{n+1}$且$\mathscr{B}'_{n+1}$在$\mathscr{P}^*_{n+1}$中是按点有限的。由相对拓扑的定义，存在$X$中的开集族$\{V(P')\mid P'\in\mathscr{P}'_{n+1}\}$，使对每一$P'\in\mathscr{P}'_{n+1}$，$V(p')\cap(X-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*)=B'(p')$。由于$\mathscr{B}'_{n+1}$加细$\mathscr{U}$，故对每一$p'\in\mathscr{P}'_{n+1}$，有$U(p)\in\mathscr{U}$，使$B'(p')\subset U(p')$，令$B(p')=V(p')\cap U(p')$，$\mathscr{B}_{n+1}=\{B(p')\mid p'\in\mathscr{P}'_{n+1}\}$，则显然满足（1）（2），因此，由归纳法可得$\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$。显然加细$\mathscr{U}$，由于$\mathscr{B}^*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n^*\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\mathscr{P}_n^*-\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}\mathscr{P}_i^*)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}_n^*=X$，这里视$\mathscr{P}_0=\{\phi\}$，故$\mathscr{B}$

*1983年2月7日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

是复盖，又对每一$x\in X$，若记n_0是使$x\in\mathscr{P}_n^*$的最小正整数，则$\mathscr{B}_{n_0}$在x处点有限，故$\mathscr{B}$是$\mathscr{U}$的弱θ-加细复盖。即X是弱θ-加细空间。

定理 2　狭义拟仿紧空间是弱$\bar{\theta}$-加细空间。

证明　从定理1的证明中可知，若$\mathscr{P}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}_n$是开复盖$\mathscr{U}$的$\sigma$-相对离散闭加细复盖，则存在$\mathscr{U}$的加细开复盖$\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，对任一$n$满足(1)$\mathscr{B}_n^*\supset\mathscr{P}_n^*-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$.(2)$\mathscr{B}_n$在$\mathscr{P}_n^*-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$中按点有限。因$\mathscr{P}$是$\sigma$-相对离散闭的，故对每一$n$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$是$X$的闭集。令$\mathscr{V}_n=\{B-\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}\mathscr{P}_i^*|B\in\mathscr{B}_n\}$(记$\mathscr{P}_0=\{\phi\}$)，$\mathscr{V}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{V}_n$，则显然$\mathscr{V}$仍是$\mathscr{U}$的弱$\theta$-加细复盖，下证$\{\mathscr{V}_n^*\}_{n=1,2\cdots}$是按点有限的。对每一$x\in X$，存在$n_0$使$x\in\mathscr{P}_{n_0}^*$，则显然当$n>n_0$时，$x\notin\mathscr{V}_n^*$故$\{\mathscr{V}_n^*\}_{n=1,2\cdots}$是按点有限的。所以$\mathscr{V}$是$\mathscr{U}$的弱$\bar{\theta}$-加细复盖，即$X$是弱$\bar{\theta}$-加细空间。

定理 3　θ-加细空间是狭义拟仿紧空间。

证明　设$\mathscr{U}$是X的任一开复盖，因X是θ-加细空间，所以存在一列加细复盖$\{\mathscr{U}_n\}_{n=1,2\cdots}$使对每一$x\in X$存在$n(x)$，使$\mathscr{U}_{n(x)}$在$x$处点有限。用[1]中引理1.6的证法，对每一$\mathscr{U}_n$，存在$\sigma$-相对离散闭加细$\mathscr{P}_n=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\mathscr{P}_{nm}$，它复盖$X_n=\{x\in X|\mathscr{U}_n$在$x$处点有限$\}$。令$\mathscr{W}_1=\mathscr{P}_{11}$，$\mathscr{W}_2=\mathscr{P}_{12}$，$\mathscr{W}_3=\mathscr{P}_{21}$，$\mathscr{W}_4=\mathscr{P}_{13}$，$\mathscr{W}_5=\mathscr{P}_{22}$，$\mathscr{W}_6=\mathscr{P}_{31}$，$\mathscr{W}_7=\mathscr{P}_{14}$，…，则显然$\mathscr{W}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{W}_n$是$X$中$\mathscr{U}$的$\sigma$-相对离散闭加细集族，它复盖$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n=X$。所以$X$是狭义拟仿紧空间。

下面的定理给出了一个构造非拟仿紧空间的方法。

定理 4　设X是正则非次仿紧空间，$Y=[0,1)$以集族$\{[0,t]|0<t<1\}$为开基，则$X'=X\times Y$不是拟仿紧空间。

证明　因为X为正则非次仿紧空间，故存在开复盖$\mathscr{P}$，它不存在σ-离散加细复盖。由于$X\times\{0\}$与X是同胚的，故$\{P\times\{0\}|P\in\mathscr{P}\}$是$X\times\{0\}$的没有$\sigma$-离散加细复盖的开复盖。令

$$\mathscr{P}'=\{P\times[0,t)|P\in\mathscr{P},\ 0<t<1\},$$

显然$\mathscr{P}'$是X'的开复盖，下证它无σ-相对离散加细复盖。设$\mathscr{U}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n$是$\mathscr{P}'$的$\sigma$-相对离散加细复盖，先证明，对每一$n$及每一$x\in X$，存在$t\in Y$使$(x,t)\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{U}_i^*$。$n=1$时，$(\{x\}\times Y)\cap U\neq\phi$至多对一个$U\in\mathscr{U}_1$成立，不然有$U_1,U_2\in\mathscr{U}_1$，使$(\{x\}\times Y)\cap U_i\neq\phi(i=1,2)$，设$(x,t_i)\in(\{x\}\times Y)\cap U_i(i=1,2)$，不妨设$t_1\geqslant t_2$，则显然$(x,t_1)$的任一邻域都是$(x,t_2)$的邻域，从而$(x,t_1)$的任一邻域至少与$\mathscr{U}_1$的两个元素相交，这与$\mathscr{U}_1$是离散族矛盾。假定$n=k$时结论也对，则当$n=k+1$时，由归纳假设$(\{x\}\times Y)\cap(X'-\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{U}_i^*)\neq\phi$，与上述理由相同，$(\{x\}\times Y)\cap(X'-\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{U}_i^*)\cap U\neq\phi$至多对一个$U\in\mathscr{U}_{k+1}$成立，而$\mathscr{U}_{k+1}$加细$\mathscr{P}'$，故存在$t\in Y$使$(x,t)\in X'-\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{U}_i^*$但$(x,t)\notin\mathscr{U}_{k+1}^*$，从而$(x,t)\notin\bigcup\limits_{i=1}^{k+1}\mathscr{U}_i^*$。所以我们的结论为真。其次，我们说$\mathscr{U}$必定也是$\sigma$-离散的。假定$\mathscr{U}_1$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

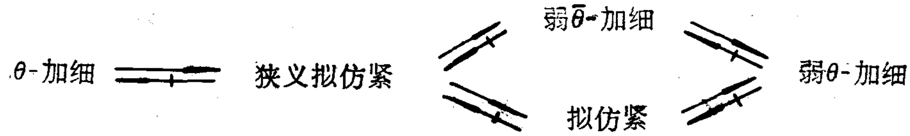
……$\mathscr{U}_n$ 是 X' 的离散集族，对任一 $(x,t)\in X'$，存在 $t'\in Y$，使 $(x,t')\in X'-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{U}_i^*$，可假定 $t'>t$，因为 $\mathscr{U}_{n+1}$ 是相对于 $X'-\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{U}_i^*$ 离散的，故 $(x,\ t')$ 的开邻域 V 与 $\mathscr{U}_{n+1}$ 的元至多一个相交，显然 V 也是 $(x,\ t)$ 的邻域，从而 $\mathscr{U}_{n+1}$ 在 X' 中离散。所以 $\mathscr{U}$ 是 σ-离散的。令 $\mathscr{U}'=\{U\cap(X\times\{0\})\mid U\in\mathscr{U}\}$，则 $\mathscr{U}'$ 是 $X\times\{0\}$ 中的 σ-离散复盖且加细 $\{p\times\{0\}\mid p\in\mathscr{P}\}$，这与前面的假设矛盾。

推论　存在一个 σ 亚紧（从而弱 θ-加细）空间，但不是拟仿紧空间。

证明　取 X 为正则弱仿紧空间，但不是次仿紧的（如[3]中例4.2），设 X' 为上述定理中的拓扑空间，那么 X' 是 σ 亚紧而不是拟仿紧空间。由上述定理仅需证 X' 是 σ 亚紧的。设 $\{t_n\}_{n=1,2\cdots}\subset Y$，且 $t_n\to 1$，则 $X'=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$，其中 $X_n=X\times[0,t_n]$，显然 X_n 是 X' 的开子空间，由于 σ 亚紧空间的可数开和仍是 σ 亚紧的。故我们只需证明每一 X_n 是 σ 亚紧的。设 $\mathscr{P}$ 是 X_n 的任一开复盖，则 $\{P\cap(X\times\{t_n\})\mid P\in\mathscr{P}\}$ 是 $X\times\{t_n\}$ 的开复盖，由于 $X\times\{t_n\}$ 与 X 是同胚的，故有点有限加细开复盖 $\mathscr{U}'$，显然 $\mathscr{U}'$ 中元素的形式为 $U\times\{t_n\}$，U 为 X 的开集。令 $\mathscr{U}=\{U\times[0,\ t_n]\mid U\times\{t_n\}\in\mathscr{U}'\}$，则显然 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{P}$ 的 X_n 中的加细开复盖，且 $\mathscr{U}$ 在 (x,t) 处点有限当且仅当 $\mathscr{U}'$ 在 $(x,\ t_n)$ 处是点有限的，从而 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{P}$ 的点有限开加细复盖，故 X_n 是弱仿紧的，更是 σ 亚紧的。

注　定理 4 中的 X' 也不是弱 $\bar{\theta}$-加细空间，且易见若取 X 为单元集，则 X' 为 Lindelöf（从而拟仿紧）空间，但不是弱 $\bar{\theta}$-加细空间。

至此，联系 §3 的例 1，2，可知下面的关系：



J. K. Boone 在[2]中证明了拓扑空间是弱仿紧空间当且仅当它是 θ-加细和点式集态正规的。

下面的定理改进了这个结果。

定理 5　拓扑空间 X 是弱仿紧的当且仅当它是狭义拟仿紧且点式集态正规的。

证明　显然只要证明充分性。

设 $\mathscr{P}$ 是 X 的任一开复盖，因 X 是狭义拟仿紧的，故有 σ-相对离散闭加细复盖 $\mathscr{U}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n$。因为 X 是点式集态正规的，而 $\mathscr{U}_1$ 是离散闭集族且加细 $\mathscr{P}$，故有加细 $\mathscr{P}$ 的点有限开集族 $\mathscr{W}_1$ 满足 $\mathscr{W}_1^*\supset\mathscr{U}_1^*$，假定已作出加细 $\mathscr{P}$ 的点有限开集族 $\mathscr{W}_n$ 满足 $\mathscr{W}_n^*\supset\mathscr{U}_n^*-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\mathscr{W}_i^*$，$1<n\leqslant k$，则由于 $\mathscr{U}_{k+1}$ 是相对于 $X-\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{U}_i^*$ 的离散闭集族，又 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{W}_i^*$ 是含 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{U}_i^*$ 的开集，故 $\mathscr{U}'_{k+1}=\{U-\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{W}_i^*\mid U\in\mathscr{U}_{k+1}\}$ 是 X 的离散闭集族，从而因 X 是点式集态正规的，又 $\mathscr{U}'_{k+1}$ 也加细 $\mathscr{P}$，故有加细 $\mathscr{P}$ 的点有限的开集族 $\mathscr{W}_{k+1}$ 使 $\mathscr{W}_{k+1}^*\supset\mathscr{U}'^*_{k+1}=\mathscr{U}_{k+1}^*-\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathscr{W}_i^*$。由归纳法可得加细 $\mathscr{P}$ 的 σ 点有限开集族 $\mathscr{W}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{W}_n$ 满足 $\mathscr{W}_n^*\supset\mathscr{U}_n^*-\bigcup\limits_{i=0}^{n-1}\mathscr{W}_i^*$ $(\mathscr{W}_0=\{\phi\})$。易见 $\mathscr{W}^*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{W}_n^*\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n^*=X$，故 $\mathscr{W}$ 复盖 X。令 $\mathscr{B}_1=\mathscr{W}_1$，$\mathscr{B}_n=$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$\{W-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{U}_i^*|W\in\mathscr{W}_n\}$，$n>1$，$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，则由于对每一 n，$\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{U}_i^*$是闭集，故$\mathscr{B}$仍是加细$\mathscr{P}$的开集族，显然 $\mathscr{B}_n^*\supset\mathscr{U}_n^*-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{W}_i^*$，故$\mathscr{B}$复盖$X$，下证$\mathscr{B}$是点有限的，由于每一$\mathscr{B}_n$是点有限的，故只需证明$\{\mathscr{B}_n^*\}_{n=1,2\cdots}$是按点有限的．设$x\in X$，则存在$n_0$使$x\in\mathscr{U}_{n_0}^*$，从而当$n>n_0$时$x\notin\mathscr{B}_n^*$，故$\{\mathscr{B}_n^*\}_{n=1,2\cdots}$是点有限的．所以$X$是弱仿紧空间．

类似于定理5的证法，可以证明下面两个定理．

定理6 拟仿紧，$\sigma PcWN$空间是σ亚紧的．

定理7 具有(δ)性质的拟仿紧空间是Lindelöf空间．

由前面的注记，定理6不被[4]的定理5所包含；定理7不被[5]的定理3.3所包含．

§3 几个例子

例1 一个弱$\bar{\theta}$-加细空间，但不是狭义拟仿紧的．

设X为一不可数集，其拓扑$\mathscr{T}=\{U|X-U$是可数集或有限集$\}\cup\{\phi\}$．先证明X是弱$\bar{\theta}$-加细空间．设$\mathscr{U}$是X的任一开复盖，在$\mathscr{U}$中取一非空开集U_0，则$X-U_0=A$至多是可数集，因$\mathscr{U}$是复盖，故对每一$x\in A$，存在$U_x\in\mathscr{U}$，使$x\in U_x$，令$V_x=(U_x-A)\cup\{x\}$，则显然V_x是x的开邻域．令$\mathscr{U}_1=\{U_0\}$，$\mathscr{U}_2=\{V_x|x\in A\}$，则显然$\bigcup_{i=1}^{2}\mathscr{U}_i$是$\mathscr{U}$的弱$\bar{\theta}$-加细复盖，所以$X$是弱$\bar{\theta}$-加细空间．现在证明$X$不是狭义拟仿紧的．设$\mathscr{P}$是$X$的任一开复盖，满足$X\notin\mathscr{P}$，我们证明$\mathscr{P}$不存在$\sigma$-相对离散闭加细复盖．设若$\mathscr{U}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n$是$\mathscr{P}$的$\sigma$-相对离散闭加细复盖，则由于$\mathscr{U}_1$是离散闭集族，因$X\notin\mathscr{U}_1$，故$\mathscr{U}_1$的每一元素至多是可数的．设$x_0\in X$，则存在$x_0$的开邻域$V$使$V\cap U\neq\phi$至多对$\mathscr{U}_1$中一个元素成立，不妨记为$U_0$，故$\cup\{U\in\mathscr{U}_1|U\neq U_0\}\subset X-V$，从而$\cup\{U\in\mathscr{U}_1|U\neq U_0\}$至多是可数的，又$U_0$至多也是可数的，故$\mathscr{U}_1^*$至多是可数集．由归纳法不难证明，对每一$n$，$\bigcup_{k=1}^{n}\mathscr{U}_k^*$至多是可数的，从而$\mathscr{U}^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_n^*$至多是可数集，故不能复盖$X$，与假设矛盾．所以$X$不是狭义拟仿紧空间．

戴牧民在[4]中说该例不是弱$\bar{\theta}$-加细空间，并由此指出[4]中定理5的条件仅是充分条件．而由上述证明可知该例是弱$\bar{\theta}$-加细空间，从而[2]的结论不可靠，但由§2中的注记及推论可知，[2]定理5的条件确实不是必要条件．

例2 [6.例1]一个狭义拟仿紧空间，但不是θ-加细空间

设X为实数集，Q为有理数集，对每一$x\in X$，若$x\in X-Q$，x的邻域基为$\{x\}$，若$x\in Q$，x的邻域基为$\{V\cap(X-Q)\cup\{x\}|V$是通常拓扑下点x的开邻域$\}$，[6]中已证X不是θ-加细空间．下证它是狭义拟仿紧空间．显然，$\mathscr{V}_1=\{\{x\}|x\in Q\}$是$X$的离散闭集族，而$\mathscr{V}_2=\{\{x\}|x\in X-Q\}$是离散子空间$X-Q$的离散闭集族．所以，$\mathscr{V}=\bigcup_{i=1}^{2}\mathscr{V}_i$是任何开复盖的$\sigma$-相对离散闭加细复盖，从而$X$是狭义拟仿紧空间．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参　考　文　献

[1] 刘应明，一类包含弱仿紧空间与次仿紧空间的拓扑空间，数学学报，20(1977)，212—214.（全文见：《四川大学学报》(自然科学版)，1978年第2—3期，25—35）

[2] Boone, J. R., A Characterization of Meta compactness in the class of θ-refinable spaces, *Gen. Top. Appl.*, 2 (1972), 49—54.

[3] Burke, D. K., On subparacompact spaces, *Proc. Amer. Math.* soc., 23(1969), 655—663.

[4] 戴牧民，σ按点族正规性，σ亚紧和σ按点有限基，数学学报，24(1981)，656—667.

[5] Smith, J. C., Properties of weak $\bar{\theta}$-refinable spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 53(1975), 511—512.

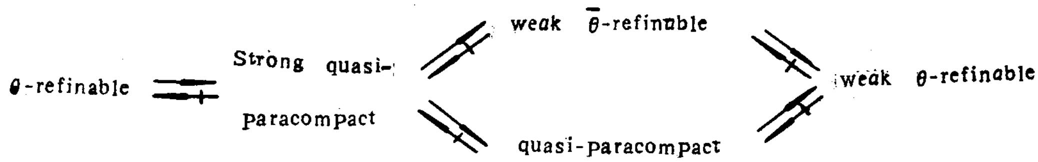
[6] Bennet, H. R. and Lutzer, D. J., A note on weak θ-refinability, *Gen. Top. Appl.*, 2 (1972), 49—54.

Some Properties of Quasi-paracompact and Strong Quasi-paracompact Spaces

Zhu Jun

Abstract

Liu Ying-Ming [1] defined quasi-paracompact and strong quasi-paracompact spaces which generalize both subparacompact spaces and metacompact spaces. At the Wuhu Conference on Topology (1979), Gao Guo-Shi pointed out that θ-refinable space is quasi-paracompact space and the converse is false, and the relation between quasi-paracompact spaces and weak θ-refinable spaces is unknown. In this paper, we answer the above question and abtain the following result.



Morever, we prove that a space is metacompact if and only if it is strong quasi-paracompact and pointwise collectionwise normal, which improves a result of J. R. Boone.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.