第4卷 第1期 1984年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.1 Jan. 1984

以酉辛群为特征边界的双曲空间的调和分析*

陈广晓

（中国科学院 应用数学研究所）

§1. 前　言

本文采用四元数体的观点，讨论了以酉辛群$USp(2n)$为特征边界的双曲空间

$$\{I-Z\bar{Z}'>0, ZJ=J\bar{Z}\} \tag{1.1}$$

的调和函数论，从另一角度建立酉辛群上的Abel收敛定理的出发点。

§2. 四元数体Q上的第一类典型域

华罗庚教授、万哲元教授“典型群”[2]中建立了一般非交换体上方阵行列式理论。

四元数体Q的工阶方阵表示

$$\tau: a+ib+jx+ky \to \begin{pmatrix} a+ib, & x+iy \\ -x+iy, & a-ib \end{pmatrix}$$

诱导出环$M(n,Q)$到$M(2n,\mathbf{C})$中的忠实表示

$$\tau^1: (q_{st})_{1\leqslant s,t\leqslant n} \to (\tau(q_{st}))_{1\leqslant s,t\leqslant n},$$

用A表$M(n,Q)$的元素，则$\det A=\sqrt{\det\tau^1(A)}$。$\tau^1$还把$Q$上的酉群$U(n,Q)$忠实地表示为酉辛群$USp(2n)$。

定理　设$Z\in M(n,Q)$，则存在$U,V\in U(n,Q)$，使

$$UZV^{-1}=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]\ (\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0).$$

§3. $\mathbf{R}_I(\mathbf{n},\mathbf{Q})$的运动群和调和算子

设Z表四元数方阵，则$R_I(n,Q)=\{I-Z\bar{Z}'>0\}$，是（1,1）的等价表示。变换群为

$$Z_1=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}=(Z\bar{B}'+\bar{A}')^{-1}(Z\bar{D}'+\bar{C}'), \tag{3.1}$$

其中四元数方阵

$$X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ K=[I^{(n)}\ -I^{(n)}] \tag{3.2}$$

都适合$XK\bar{X}'=K$，$\det X=1$。变形（3,1）把原点变为BD^{-1}。而使原点不变的变换

$$Z_1=UZV^{-1}\ (U,V\in U(n,Q)) \tag{3.3}$$

*1981年6月10日收到。

在 $R_I(n,Q)$ 的特征边界 $U(n,Q)$ 上可递。

令

$$\partial_z' = \left(\frac{\partial}{\partial q_{ji}}\right)_{1\leq i,j\leq n}, \quad \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial a} - i\frac{\partial}{\partial b} - j\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{3,4}$$

利用形式微分算子的性质，易证

定理　$R_I(n,Q)$ 的调和算子在 $Z=Z_0$ 时的值为

$$16\mathrm{Retr}\Delta_z u(Z)\,|_{Z=Z_0} = 16\mathrm{Retr}\{\partial_Z'(I-Z_0\bar{Z}')\bar{\partial}_Z u(I-\bar{Z}'Z_0)\}_{Z=Z_0} \tag{3.5}$$

§4. Poisson 核及 Poisson 积分

变形 (3.1) 保持特征边界 $U(n,Q)$ 不变。我们有

定理　1. 把 Z_0 变为原点的变形在 $U(n,Q)$ 上引起的变形的（体积元素的）Jacobian 为

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}} = P(Z_0, U) = \frac{\det(I-Z_0\bar{Z}_0')^{2n+1}}{\det(I-Z_0\bar{U}')^{4n+2}} \tag{4.1}$$

2. 如果把 Z_0 变为原点的变形把 Z_1, U_1 分别变为 Z_2、U_2。那末 Poisson 核间有关系：

$$P(Z_2,U_2) = P(Z_1,U_1)P(Z_0,U_1)^{-1}. \tag{4.2}$$

由此定理及 (4.1) 的可微性，无须直接计算，就可证得 Poisson 核 (4.1)（作为 Z_0 的函数）被一切不变算子零化。特别是，Poisson 核为调和函数。

连续函数的 Poisson 积分不但是调和的，而且和多复变函数论方阵典型域的 Poisson 积分一样，是 ξ 类调和函数（华罗庚[1]）。由极值原理推出

定理　在 $U_n(Q)$ 上给了一个连续函数 $\varphi(U)$，则存在一个且只有一个 ξ 类调和函数 $u(Z)$，使得，当 Z 从 $\overline{R_I(Q)} - U_n(Q)$ 内部趋于 $V \in U_n(Q)$ 时，有

$$\lim \quad u(Z) = \varphi(V); \tag{4.3}$$

此函数由 Poisson 公式

$$u(Z) = \frac{1}{C}\int \varphi(V)P(Z,V)\dot{V}\left(\frac{1}{C}\int \dot{V} = 1\right) \tag{4.4}$$

给出。

§5. Poisson 核的内闭一致收敛展开与 A 求和

利用 $U(2n)$ 的既约酉表示限制在子群 $\mathrm{Usp}(2n)$ 上的进一步分解，可以和 [1] 一样阐明，展开式

$$P(Z,U) = \sum_f \sum_{ij} \phi_{ij}^f(\tau^1(Z))\, a_{ij}^f(\overline{\tau(U)})$$

在

$$r^2 I - Z\bar{Z}' > 0, \quad Z \in M(n,Q)$$

的闭包一致且绝对收敛，而且

$$\lim_{Z\to U} \phi_{ij}^f(\tau^1(Z)) = N(f)\, a_{ij}^f(\tau(U)) \quad (U \in U(n,Q)).$$

特别，令 $Z=rI$，Poisson 核 $P(rI,U)$ 与[7]中 $Pr(U)$ 重合，因此重新得到酉辛群上A收敛定理，而且有

定理　当 r 上升地趋于1时，$\rho^f(r)$ 亦上升地趋于1。

本文是在华罗庚教授和龚昇教授指导下完成的。

参考文献

[1] 华罗庚，多复变数函数论中的典型域的调和分析，科学出版社，北京，1958.

[2] 华罗庚、万哲元，典型群，上海科技出版社，1963.

[3] 龚昇，酉群上的富里埃分析Ⅰ，数学学报，10 (1960)，239—261.

[4] 陆启铿，典型流形与典型域，上海科技出版社，1963年.

[5] 钟加庆，旋转群上的调和分析—ABEL求和，中国科技大学学报，9：1. (1979)，31—43.

[6] 孙继广，一种有界对称域的调和函数，中国科技大学学报，3；2 (1973)，55—67.

[7] 陈广晓、贺祖琪，酉辛群上的调和分析Ⅰ，数学研究与评论，Vol.2 (1983)，No.2，23—26.

[8] Helgason, S. Differential Geometry and Symmetric Spaces (1962).

[9] H. Weyl, Classical Groups (1946).

Harmonic Analysis on Bounded Domain that has USp(2n) as Its Characteristic Manifold.

Chen Guang-hsiao (陈广晓)

(Institute of Applied Math. Academia Sinica)

Abstract

In the present note, We study harmonic analysis on the bounded domain

$$\{I-Z\bar{Z}'>0,\ ZJ=J\bar{Z}\},\tag{1}$$

that is equivelent to[1] $Sp(p,q)/Sp(p)\times Sp(q)$, and that has $USp(2n)$ as its characteristic manifold.

We prove:

Theorem Ⅰ　The Poisson Kernel of (1) is

$$\{\det(I-Z\bar{Z}')/\det(I-Z\bar{U}')^2\}^{2n+1};\tag{2}$$

Theorem Ⅱ　Given any continuous function $\varphi(U)$ on $Usp(2n)$, there exists one and only one harmonic function $u(Z)$ on (1), swch that $\lim\limits_{Z\to V} u(Z)=\varphi(V)$;

Theorem Ⅲ　Any continuous function $\varphi(U)$ on $USp(2n)$ can be summable to itself by meaus of Abelian summability of its Fouriér Series.