第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

关于(m,n,ρ)级半纯函数的一些结果*

孙道椿

（武汉大学数学系）

本文引进了(m,n,ρ)级函数的概念，证明了(m,n,ρ)级半纯函数存在相应的型函数。

定义 1 $e_0^r=\ln_0 r=r$，$e_n^r=e^{e_{n-1}^r}$，$\ln_n r=\ln(\ln_{n-1}r)$。

定义 2 若函数$M(r)\leqslant\rho(r)$，且存在点列$\{r_n\}\to\infty$，使$M(r_n)=\rho(r_n)$，则记为$M(r)\lessdot\rho(r)$。

定义 3 设$M(r)$为$[a,\infty)$上的正值实函数，且$\lim\limits_{r\to\infty}M(r)=\infty$。令

$$\rho(m,n)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln_{m+n}M(r)}{\ln_n r}=\rho,$$

其中m为整数，n为正整数，并且$m+n\geqslant1$。

(1) 当$0<\rho(m,n)<\infty$，且$\rho(m,n-1)$等于零或∞时，称$M(r)$为(m,n,ρ)级半纯函数。

(2) 若不论m为何整数，$\rho(m,n)$总为∞，则称$M(r)$为(∞,n,∞)级函数。

(3) 若不论n为何整数，恒有$\rho(m,n)=0$及$\rho(m-1,n)=\infty$，则称$M(r)$为$(m,\infty,0)$级函数。

定义 4 称$(m',n',\rho')>(m,n,\rho)$，意即以下之一成立。

(1) $m'>m$；

(2) $m'=m\wedge\rho'(m',n'-1)>\rho(m,n-1)$；

(3) $m'=m\wedge\rho'(m',n'-1)=\rho(m,n-1)=\infty\wedge n'>n$；

(4) $m'=m\wedge\rho'(m',n'-1)=\rho(m,n-1)=0\wedge n'<n$；

(5) $m'=m\wedge\rho'(m',n'-1)=\rho(m,n-1)\wedge n'=n\wedge\rho'>\rho$。

定义 5 若半纯函数$f(z)$的特征函数$T(r,f)$是(m,n,ρ)，则称$f(z)$为(m,n,ρ)级半纯函数。

文中C，K均为常数，ε，δ为任意小正数。

引理 1 设函数$f(x)$，$g(x)$在$[c-1,c+1]$上具有一阶连续导函数，且有

$$(a)\ f(c)=g(c),\quad (b)\ f'(c)-g'(c)=H\neq0.$$

则对任意$\delta>0$，存在$t>0$，当$t\geqslant\varepsilon>0$时，恒有$k(\varepsilon)$ $(0<k(\varepsilon)<\infty)$，使函数

*1981年7月1日收到.

$$L(f,g;x)=\int_{c-\varepsilon}^{x}\left\{f'(r)+[g'(r)-f'(r)]\cdot\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{k(\varepsilon)}\right\}dr+f(c+\varepsilon)$$

在$[c-\varepsilon,c+\varepsilon]$内满足：

(1) $L(f,g,;x)$有一阶连续导函数；

(2) $\min\{f'(x),g'(x)\}\leqslant L'(f,g;x)\leqslant\max\{f'(x),g'(x)\}$；

(3) $L'(f,g;c-\varepsilon)=f'(c-\varepsilon)$，$L'(f,g;c+\varepsilon)=g'(c+\varepsilon)$；

(4) $L(f,g;c-\varepsilon)=f(c-\varepsilon)$，$L(f,g;c+\varepsilon)=g(c+\varepsilon)$；

(5) 若$H<0$，则

$$\max\{f(x),g(x)\}\leqslant L(f,g;x)\leqslant f(x)+\delta,$$

若$H>0$，则

$$\min\{f(x),g(x)\}\geqslant L(f,g;x)\geqslant f(x)-\delta.$$

证 我们只证明$H<0$的情况．由连续性，存在$t_1>0$，当$t_1\geqslant|\varepsilon_1|$时，

$$|f'(c+\varepsilon_1)-g'(c+\varepsilon_1)-H|<-\frac{1}{9}H.\ \text{取}\ t=\min\left\{\frac{-\delta}{4H},\ t_1\right\},$$

则当$t\geqslant\varepsilon>0$时，

$$L(f,g;c+\varepsilon)-g(c+\varepsilon)$$

$$=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\left\{[g'(r)-f'(r)]\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^k+f'(r)\right\}dr-\int_{c}^{c+\varepsilon}g'(r)\,dr-\int_{c-\varepsilon}^{c}f'(r)d$$

$$=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}[g'(r)-f'(r)]\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^k dr-\int_{c}^{c+\varepsilon}[g'(r)-f'(r)]dr$$

$$<-\frac{10}{9}H\left(\frac{2\varepsilon}{k+1}\right)+\frac{8}{9}H\varepsilon=\frac{1}{3}H\varepsilon<0\quad(\text{当}\ k=3),$$

$$L(f,g;x)-g(c+\varepsilon)$$

$$\geqslant-\frac{8}{9}H\left(\frac{2\varepsilon}{k+1}\right)+\frac{10}{9}H\varepsilon=-\frac{2}{9}H\varepsilon>0\left(\text{当}\ k=\frac{1}{3}\right).$$

由于$L(f,g;x)$对K连续，所以必存在$K(\varepsilon)$，$\left(\frac{1}{3}<K(\varepsilon)<3\right)$使$L(f,g;c+\varepsilon)=g(c+\varepsilon)$．显然这时(1)，(2)，(3)，(4)都成立。

(5) $0\leqslant L(f,g;x)-f(x)$

$$=\int_{c-\varepsilon}^{x}(g'(r)-f'(r))\cdot\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^k dr<-2H\cdot2\varepsilon\leqslant\delta.$$

又因 $L(f,g;x)-g(x)$

$$=\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\left\{f'(r)+(g'(r)-f'(r))\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^k\right\}dr$$

$$-\int_{x}^{c+\varepsilon}\left\{f'(r)+(g'(r)-f'(r))\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^k\right\}dr$$

$$-\int_{c-\varepsilon}^{c}f'(r)\,dr-\int_{c}^{c+\varepsilon}g'(r)\,dr+\int_{x}^{c+\varepsilon}g'(x)\,dr$$

$$=L(f,g;c+\varepsilon)-g(c+\varepsilon)$$

$$+\int_x^{c+\varepsilon}(g'(r)-f'(r))\left[1-\left(\frac{r-c+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^k\right]dr\geqslant 0.$$ 证毕。

定理 1 设 $\mu(x)$ 在 $[Q,\infty)$ 上连续，且有

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\mu(x)=0\quad(\text{或}\ \underline{\lim_{x\to\infty}}\,\mu(x)=0).$$

则存在二阶可微函数 $\rho(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\rho(x)=0$。

(2) $\mu(x)\leqslant\rho(x)$　　(或 $\rho(x)\leqslant\mu(x)$)。

(3) 对任意正整数 N，总存在 $a(N)$，使当 $x>a(N)$ 时，有

$$|\rho'(x)|\leqslant\ln_N'x=1\Big/\prod_{i=0}^{N-1}\ln_i x,$$

$$|\rho''(x)|\leqslant-\ln_N''x\sim 1\Big/x\prod_{i=0}^{N-1}\ln_i x.$$

(4) 当 x 充分大时，函数 $\rho(x)$，$\rho'(x)$，$\rho''(x)$ 均连续，且均与 x 轴无交点，或与 x 轴重合。

证 (一)若存在 $\Delta\geqslant Q$，当 $x\geqslant\Delta$ 时，恒有 $\mu(x)<0$。则令 $M=\sup\{\mu(x)\,|\,a\leqslant x\leqslant\Delta\}$。

$$A=\max\{\Delta,e\}$$

$$m=\sup\{\mu(x)/2\,|\,2A\leqslant x\leqslant 2A+\pi\}<0.$$

定义

$$\rho_0(x)=\begin{cases}\dfrac{M}{A^4}(x-2A)^4 & a\leqslant x\leqslant 2A;\\ m\sin^3(x-2A) & 2A\leqslant x\leqslant 2A+\pi;\\ 0 & 2A+\pi\leqslant x.\end{cases}$$

显然 $\mu(x)\leqslant\rho_0(x)$，且 $\rho_0''(2A+\pi)=0$。

于是对任意 $y<2A+\pi$，必有 $y_0(y<y_0<2A+\pi)$ 存在，当 $y_0\leqslant x\leqslant 2A+\pi$ 时，有

$$\ln''x<\rho_0''(x);\qquad l(x)<\rho_0'(x),$$

其中 $l(x)=\ln'x-\ln'y_0+\rho_0'(y_0)$。

定义

$$g(x)=\begin{cases}\rho_0'(x) & a\leqslant x\leqslant y_0-\varepsilon;\\ L(\rho_0',l;x) & y_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant y_0+\varepsilon;\\ l(x) & y_0+\varepsilon\leqslant x\leqslant H-\varepsilon;\\ L(l,0;x) & H-\varepsilon\leqslant x\leqslant H+\varepsilon;\\ 0 & H+\varepsilon\leqslant x.\end{cases}$$

其中 $L(\cdot,\cdot;x)$ 是引理 1 中函数，H 是 $l(x)=0$ 的根。令 $G(x)=\int_a^x g(r)\,dr+\dfrac{M}{A^4}(a-2A)^4$，于是有 $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)=b_1<0$　故存在

$$P>\max\{2A+\pi, e_2\},$$

使
$$\mu(P)-G(P)=\alpha_1>0.$$

取　$\beta<\min\{\alpha_1/\ln P, g(y_0), 1/2\}$，及$Q$充分大，

$$t(x)=\begin{cases} g(x) & a\leqslant x\leqslant y_1-\varepsilon; \\ L(g,\beta\ln' x;x) & y_1-\varepsilon\leqslant x\leqslant y_1+\varepsilon; \\ \beta\ln' x & y_1+\varepsilon\leqslant x\leqslant Q_1-\varepsilon; \\ L(\beta\ln' x, \ln' x-\ln' Q;x) & Q_1-\varepsilon\leqslant x\leqslant Q_1+\varepsilon; \\ \ln' x-\ln' Q & Q_1+\varepsilon\leqslant x\leqslant Q-\varepsilon; \\ L(\ln' x-\ln' Q, 0;x) & Q-\varepsilon\leqslant x\leqslant Q+\varepsilon; \\ 0 & Q+\varepsilon\leqslant x. \end{cases}$$

使
$$\lim_{x\to\infty}T(x)=b_2>0,\quad \mu(P)-T(P)=\alpha_2>0.$$

其中
$$y_1\geqslant y_0,\ 且\ g(y_1)=\beta\ln' y_1;\quad \beta\ln' Q_1=\ln' Q_1-\ln' Q;$$

以及
$$T(x)=\int_a^x t(r)dr+M(a-2A)^4/A^4.$$

令
$$R(x)=\frac{b_2G(x)-b_1T(x)}{b_2-b_1},$$

则当$x\geqslant Q+\varepsilon$时，$R(x)=0$，且$\mu(P)>R(P)$。

令
$$S=\sup\left\{\frac{\mu(x)-R(x)}{\rho_0(x)-R(x)}\middle| y_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant Q+\varepsilon\right\}<1.$$

令　$\rho_1(x)=s\rho_0(x)+(1-s)R(x)\geqslant\mu(x)$，等式至少在一个点上成立。

令
$$x_1=\sup\{x|\rho_1(x)=\mu(x)\}<Q+\varepsilon.$$

在x_1与$Q+\varepsilon$间重复上述步骤，所不同的是，第n次用$\ln'_n x$代替上述$\ln' x$，这样一直下去，可得到$\rho_n(x)$和$\{x_n\}$，最后令$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\rho_n(x)$，由作法可看出，它即所需的$\rho(x)$。

（二）若不论Δ如何大，总有$x_0>\Delta$，使$\mu(x_0)>0$。此时把上述办法稍加变化即可证出。略。

（三）若无论Δ如何大，总有$x_0>\Delta$，使$\mu(x_0)=0$，且存在$\Delta_1>a$，当$x>\Delta_1$时，恒有$\mu(x)\leqslant 0$。此时令$M=\sup\{\mu(x)|a\leqslant x<\infty\}$，$A=\max\{M,\Delta_1,1\}$，

定义
$$\rho(x)=\begin{cases}(x-2A)^4 & a\leqslant x\leqslant 2A; \\ 0 & 2A\leqslant x.\end{cases}\quad 证毕。$$

定理 2　若连续函数$M(r)$的级为(m,n,ρ)，其中r在$[a,\infty)$上定义，则存在平函数$\rho(r)$及型函数$U(r)=e_{m+n}^{\rho(r)\ln_n r}$满足：

(1) $M(r)\leqslant U(r)$。

(2) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$。

(3)
$$\lim_{r\to\infty}\frac{U'(r)\prod\limits_{d=0}^{n-1}\ln_d r}{U(r)\prod\limits_{d=1}^{m+n-1}e_d^{\rho(r)\ln_n r}}=\rho.$$

(4) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{U(R)}{U(r)}=\begin{cases}e^{\rho k} & m+n>1;\\ (1+k)^{\rho} & m+n=1,\end{cases}$

其中 $-1<k<\infty$，

$$R=e_b^{\ln_b r\cdot\left(1+k\prod\limits_{d=b+1}^{n-1}\ln_d r/\prod\limits_{d=1}^{m+n-1}e_d^{\rho(r)\ln_n r}\right)}$$

$$b=\begin{cases}0 & m\geqslant 1 \text{ 或 } m=0,\ n=1;\\ 1-m & m=0,\ n>1 \text{ 或 } m<0,\ m+n>1;\\ -m & m<0,\ m+n=1.\end{cases}$$

定理 3　设函数 $M(r)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续，且

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}M(r)=\infty,$$

则存在连续可微函数 $U(r)$，有

(1) $M(r)\ll U(r)$。

(2) $U(r)$ 单调上升。

(3) 对任意固定的正整数 N，p，q，当 r 充分大时，有

$$U(r+x)<U(r)^{1+\alpha};\ U(r+y)<(1+\alpha)U(r),$$

其中

$$x=\frac{r\prod\limits_{c=1}^{p-1}\ln_c r}{\ln_N U(r)\prod\limits_{c=2}^{N}\ln_c U(r)};\quad y=\frac{r\prod\limits_{c=1}^{p-1}\ln_c r}{\ln_N U(r)\prod\limits_{c=1}^{N}\ln_c U(r)};$$

$$\alpha=\frac{1}{\prod\limits_{c=p}^{p+q}\ln_c r}.$$

定理 4　设 $f(z)$ 是 (m,n,ρ) 级半纯函数，且 $(m,n,\rho)>(-1,2,2)$，则存在一条方向 J：$\arg z=\alpha$，对包含 J 的任意小角域 Δ，有

(1) 当 $(m,n,\rho)>(-1,2,\rho)$ 时，则 $n(r,a;\Delta)$ 的级也是 (m,n,ρ)。

(2) 当 $m=-1$，$n=2$，$\rho>2$时，则 $n(r,a;\Delta)$ 的级是 $(m,n,\rho-1)$。

对任意复数 a，至多有二个例外值。

定理 5　设 $f(z)$ 是开平面上的半纯函数，若 $n(r,a;\Delta)$ 的级是 (m,n,ρ)，则存在平函数 $\rho_1(r)$，$\rho_2(r)$，$\lim\limits_{r\to\infty}\rho_1(r)=\lim\limits_{r\to\infty}\rho_2(r)=\rho$。

使

$$\sum_\nu\frac{1}{e_{m+n}^{(\rho+\varepsilon)\ln_n|a_\nu|}}<\sum_\nu\frac{1}{e_{m+n}^{\rho_1(|a_\nu|)\ln_n|a_\nu|}}<\infty.$$

$$\sum_\nu\frac{1}{e_{m+n}^{(\rho-\varepsilon)\ln_n|a_\nu|}}>\sum_\nu\frac{1}{e_{m+n}^{\rho_2(|a_\nu|)\ln_n|a_\nu|}}=\infty.$$

证明略。

本文是在余家荣老师的指导下完成的。特此致谢。

参 考 文 献

Juneja, O. P., Kapoor G. P. and Bajpai, S. K., On the (p,q)-order and lower (p,q)-order of an entire function, *Journal die reine und angew. Math.*, 282 (1976), P53—67.

Some Results of the Meromorphic Functions of Order (m,n,ρ)

Sun Daochun

Abstract

Theorem 1 If $\mu(r)$ is a continuous function for $a\leqslant r<\infty$, then there exist the function $\rho(r)$ which satisfy the following.

(1) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho.$

(2) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho'(r)\cdot\prod\limits_{c=0}^{N}\ln_c r=0$, and $\lim\limits_{r\to\infty}\rho''(r)\cdot r\cdot\prod\limits_{c=0}^{N}\ln_c r=0$, for any positive integer N.

(3) The signs of $\rho(r)$, $-\rho'(r)$, $\rho''(r)$ are the Same, and these functions may be zero for sufficient large r.