第4卷 第1期 1984年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.1 Jan. 1984

关于Hammerstein型非线性积分方程固有值的一点注记*

孙经先

（山东大学数学系）

本文讨论 Hammerstein 型非线性积分方程的固有值问题．设

$$A\varphi(x)=\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))dy, \tag{1}$$

其中G是n维欧氏空间R^n的有界闭域．

在讨论A的固有值问题时，一般总希望使$K(x,y)=0$成立的点(x,y)越“少”越好．在许多文献中（例如[1][2]及[3]中的定理2，定理3）都假定了$K(x,y)>0$，即在$G\times G$上$K(x,y)$处处不能等于零；另外一些文献（例如[4][5][6]），放宽了上述假定而假定非负核$K(x,y)$满足$\int_G K(x,y)dx>0$ $(\forall y\in G)$，这一假定仍然要求对任给$y\in G$，$K(x,y)\doteqdot 0$．本文给出的定理在一定程度上解除了上述限制．

设$K(x,y)$在$G\times G$上连续，$f(x,u)$在$G\times R^1$上连续，$f(x,0)\equiv 0$；令$G_X=\{x|x\in G$，对该x，$K(x,y)\doteqdot 0\}$，$G_Y=\{y|y\in G$，对该$y,K(x,y)\doteqdot 0\}$，令$G_1=G_X\cap G_Y\neq\phi$，$K_1(x,y)$是$K(x,y)$在$G_1\times G_1$上的局限（即当$x\in G_1$，$y\in G_1$时$K_1(x,y)=K(x,y)$），$f_1(x,u)$是$f(x,u)$在$G_1\times R^1$上的局限，令

$$A_1\varphi(x)=\int_{G_1}K_1(x,y)f_1(y,\varphi(y))dy, \tag{2}$$

本文的主要结论是：

定理 A以$\lambda(\lambda\neq 0)$为固有值的充分必要条件是A_1以λ为固有值．

证明 设A以λ为固有值，即存在$\psi(x)\doteqdot 0(x\in G)$，使

$$\int_G K(x,y)f(y,\psi(y))dy=\lambda\psi(x) \tag{3}$$

显然，由(3)式知当$x\overline{\in}G_X$时$\psi(x)=0$，下证当$x\in G_1$时$\psi(x)\doteqdot 0$．设$x\in G_1$时$\psi(x)\equiv 0$，则当$y\in G_1$时$f(y,\psi(y))\equiv 0$；又当$y\overline{\in}G_X$时$\psi(y)\equiv 0$，故$y\overline{\in}G_X$时$f(y,\psi(y))\equiv 0$；如果$y\in G_X$，$y\overline{\in}G_1$则必有$y\overline{\in}G_Y$，此时$K(x,y)\equiv 0$，因此

$$\lambda\psi(x)=\int_G K(x,y)f(y,\psi(y))dy=\int_{G\backslash G_X}K(x,y)f(y,\psi(y))dy$$
$$+\int_{G_X\backslash G_1}K(x,y)f(y,\psi(y))dy+\int_{G_1}K(x,y)f(y,\psi(y))dy\equiv 0 \qquad (x\in G)$$

*1981年10月20日收到．

与$\psi(x)\doteq 0$（$x\in G$）矛盾。

令$\psi_1(x)$是$\psi(x)$在G_1上的局限，则在G_1上有$\psi_1(x)\doteq 0$；注意到当$x\in G_1$时

$$\int_G K(x,y)f(y,\psi(y))dy=\int_{G\setminus G_X}K(x,y)f(y,\psi(y))dy$$

$$+\int_{G_X\setminus G_1}K(x,y)f(y,\psi(y))dy+\int_{G_1}K(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

$$=\int_{G_1}K(x,y)f(y,\psi(y))dy=\int_{G_1}K_1(x,y)f_1(y,\psi(y))dy \tag{4}$$

由(3)(4)两式知当$x\in G_1$时$\lambda\psi_1(x)=A_1\psi_1(x)$，即$\lambda$是$A_1$的固有值。

设λ是A_1的固有值，即存在$\psi_1(x)\doteq 0$（$x\in G_1$），使$\lambda\psi_1(x)=A_1\psi_1(x)$，其中$\psi_1(x)$是定义在$G_1$上的。把$\psi_1(x)$扩展定义到$G$上，使$x\bar{\in}G_1$时$\psi_1(x)\equiv 0$，令

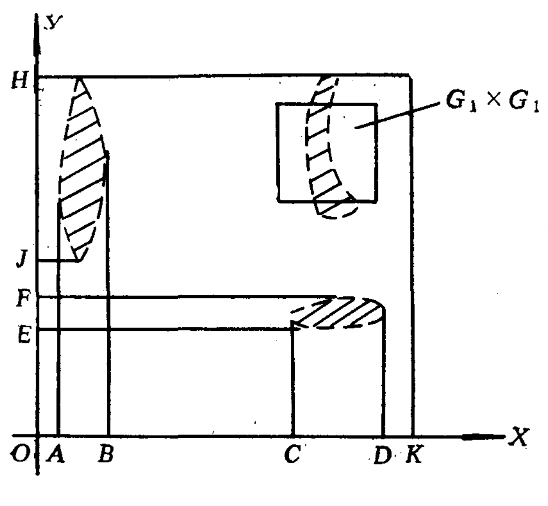
$$\psi(x)=\frac{1}{\lambda}\int_G K(x,y)f(y,\psi_1(y))dy \tag{5}$$

注意到当$x\bar{\in}G_X$时$\psi_1(x)\equiv 0$，$\psi(x)\equiv 0$，即当$y\bar{\in}G_X$时$\psi_1(y)\equiv 0$，$\psi(y)\equiv 0$，又当$y\bar{\in}G_Y$时$K(x,y)\equiv 0$，故

$$\psi(x)=\frac{1}{\lambda}\int_G K(x,y)f(y,\psi_1(y))dy=\frac{1}{\lambda}\int_{G_1}K(x,y)f(y,\psi_1(y))dy$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_{G_1}K(x,y)f(y,\psi(y))dy=\frac{1}{\lambda}\int_G K(x,y)f(y,\psi(y))dy$$

即可知$\psi(x)$是A相应于λ的固有元。定理证完。



$G_X=(A,B)\cup(C,D)\quad G=OK=OH$

$G_Y=(E,F)\cup(J,H)\quad G_1=G_X\cap G_Y$

下面举例说明上述定理的应用：

例1　（解的存在性）设 $K(x,y)$ 的取值情况如上图所示，当 (x,y) 属于阴影部分时 $K(x,y)\neq 0$，当 (x,y) 不属于阴影部分时 $K(x,y)\equiv 0$；相应于该 $K(x,y)$ 的 G_X，G_Y，G_1 如图所示；假定 $(x,y)\in G_1\times G_1$ 时 $K(x,y)\geqslant 0$。设 $f(x,u)=u^2$。容易看出，对于定义在 $G_1\times G_1$ 上的 $K_1(x,y)$ 来说，$\int_{G_1}K_1(x,y)dx>0$ $(\forall y\in G_1)$，因此根据[4]定理 3，A_1 必有非零不动点，再由本文定理可知 A 必有非零不动点。但如果从原来的 $K(x,y)$ 来直接判定 A 是否有非零不动点则是比较困难的。

例2　（解的近似求法）　设 $K(x,y)$ 同例 1，又设 $f(x,u)=a_1(x)g_1(u)+a_2(x)g_2(u)$，其中 $g_1(u)$ 不是单调增函数，$g_2(u)$ 是单调增函数；当 $x\in G_1$ 时有 $a_1(x)\equiv 0$。A 本身不是单调增算子，不容易求出它的非零不动点；但 $A_1\varphi(x)=\int_{G_1}K_1(x,y)f_1(y,\varphi(y))dy$ 却是单调增算子，可以用迭代法求出其非零不动点（参见[7]），设求出的非零不动点是 φ_1，再用本文(5)式，即可求出 A 的非零不动点。

作者衷心感谢郭大钧教授的指导。

参　考　文　献

[1] Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956.

[2] Cronin, J., Eigenvalues of some nonlinear operators, J. Math. Anal. Appl., 38(1972), 659—667.

[3] 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的非零解，科学通报，24 (1979)，193—197.

[4] 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的正解个数，数学学报，22 (1979)，584—595.

[5] 郭大钧，Hammerstein 型非线性积分方程的固有值，数学学报，20 (1977)，99—108.

[6] Guo Dajun(郭大钧)，Eigenvalues and eigenveetors of nonlinear operators, *Chin. Ann. of Math.*, 2(Eng. Issne)(1981)，65—80.

[7] Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problem in ordered Banach spaces, *SIAM Review*, 18 (1976), 620—709.

A Note on Eigenvalues of Hammerstein Nonlinear Integral Equations

Sun Jingxian

Abstract

Let $A\varphi(x)=\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))dy$, where G is a bounded closed domain in Euclidean space, $K(x,y)$ is continuous on $G\times G$, $f(x,u)$ is continuous on $G\times R$, and $f(x,0)\equiv 0$. Set $G_X=\{x|x\in G,\ K(x,y)\not\equiv 0\}$, $G_Y=\{y|y\in G,\ K(x,y)\not\equiv 0\}$, $G_1=G_X\cap G_Y\neq\phi$. Let $K_1(x,y)$ be the restriction of $K(x,y)$ on $G_1\times G_1$, $f_1(x,u)$ be the restriction of $f(x,u)$ on $G_1\times R$, and $A_1\varphi=\int_{G_1}K_1(x,y)f_1(y,\varphi_1(y))dy$, The main result of this paper is

Theorem　$\lambda\neq 0$ is an eigenvalue of A, if and only if λ is an eigenvalue of A_1.