第4卷 第1期 数学研究与评论 Vol.4 No.1
1984年1月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Jan. 1984

Hermite—Λ 插值样条*

吴正昌 沙震

（浙江大学）

设$-\infty<a<b<+\infty$。给定一列$2k$阶微分算子

$$\Lambda_i=D^{2k}+\sum_{\nu=0}^{2k-1}a_{i\nu}D^{\nu},\quad a_{i\nu}\in C[a,b],\quad D=\frac{d}{dx},\ i=1,2\cdots.$$

任给$[a,b]$的一个分划Δ_n: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$。若有$\tau(x)$满足：(i) 在每个小区间$(x_{i-1},\ x_i)(i=1,2,\cdots,n)$上$\Lambda_i\tau=0$；(ii) $\tau^{(j)}(x_i)=f_i^{(j)}$ $(i=0,1,\cdots,n,\ j=0,1,\cdots,k-1)$。我们称$\tau(x)$是对应于$\Delta_n$，$\{\Lambda_i\}$的Hermite—Λ插值样条。

本文只就特殊情况，即$\Lambda_i\equiv\Lambda=D^4+\sum_{\nu=0}^{3}a_\nu D^\nu$，进行讨论。（对于一般情况，可以一样进行研究而无实质性困难。）显然它是分段三次Hermite插值[1]的推广，然而我们将证明，就误差估计而言，两者是完全雷同的。

我们约定若$\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4$是四个运算子，那末记号$|\partial_1\varphi,\partial_2\varphi,\partial_3\varphi,\partial_4\varphi|$就表示下面的行列式：

$$\begin{vmatrix}\partial_1\varphi & \partial_1\psi & \partial_1\xi & \partial_1\eta\\ \partial_2\varphi & \partial_2\psi & \partial_2\xi & \partial_2\eta\\ \partial_3\varphi & \partial_3\psi & \partial_3\xi & \partial_3\eta\\ \partial_4\varphi & \partial_4\psi & \partial_4\xi & \partial_4\eta\end{vmatrix}$$

又记号$|\varphi_{i_\varphi},\ \varphi_{i+1},\ \varphi'_i,\ \varphi'_{i+1}|$表示下面的行列式：

$$\begin{vmatrix}\varphi_{i_\varphi} & \psi_{i_\psi} & \xi_{i_\xi} & \eta_{i_\eta}\\ \varphi_{i+1} & \psi_{i+1} & \xi_{i+1} & \eta_{i+1}\\ \varphi'_i & \psi'_i & \xi'_i & \eta'_i\\ \varphi'_{i+1} & \psi'_{i+1} & \xi'_{i+1} & \eta'_{i+1}\end{vmatrix}$$

其中足标i_φ，i_ψ，i_ξ，i_η可以互不相同，下文中的这类记号其意义自明，就不一一列举说明了。

用N_Λ表示算子Λ的零空间。设$\varphi,\psi,\xi,\eta\in\Lambda$，它们线性无关，并假定它们都属于$C^6[a,b]$。设$\tau(x)$在$(x_i,\ x_{i+1})$上有表达式：

$$\tau(x)=A\varphi(x)+B\psi(x)+C\xi(x)+D\eta(x)\tag{1}$$

*1981年7月22日收到。

根据插值条件 $\tau(x_i)=f_i$，$\tau'(x_i)=f'_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 可以得到关于 A,B,C,D 的方程组：

$$\Phi\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_i\\f_{i+1}\\f'_i\\f'_{i+1}\end{pmatrix},\tag{1'}$$

其中 Φ 为矩阵

$$\begin{pmatrix}\varphi_i & \psi_i & \xi_i & \eta_i\\ \varphi_{i+1} & \psi_{i+1} & \xi_{i+1} & \eta_{i+1}\\ \varphi'_i & \psi'_i & \xi'_i & \eta'_i\\ \varphi'_{i+1} & \psi'_{i+1} & \xi'_{i+1} & \eta'_{i+1}\end{pmatrix},$$

Φ 的行列式记为 Δ_i，即有

$$\Delta_i\equiv\det\Phi\equiv|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi'_i,\varphi'_{i+1}|.$$

我们再引入几个记号：

(i) $r(x)=|\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)\varphi'''(x)|$，显然它就是 φ,ψ,ξ,η 的 Wronski 行列式，可见 $r(x)\neq0$ $(x\in[a,b))$，我们记

$$r=\min_{a\le x<b}|r(x)|\tag{2}$$

(ii) $\|\cdot,\cdot,\cdot,\cdot\|$ 表示行列式 $|\cdot,\cdot,\cdot,\cdot|$ 的绝对值。

(iii) $\delta(\Lambda)=\max\limits_{x,y,z\in[a,b]}\{\|\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\varphi^{(4)}(y_\varphi)\|,\ \|\varphi(x),\varphi'(x),\varphi'''(x),\varphi^{(4)}(y_\varphi)\|,\ \|\varphi(x),\varphi'(x),\varphi^{(4)}(y_\varphi),\varphi^{(4)}(z_\varphi)\|\}$

注：这里 $y\in[a,b]$ 是表示 $y_\varphi,y_\psi,y_\eta,y_\xi$ 可以互相独立地取值于 $[a,b]$，对于 $z\in[a,b]$ 意义相同。

(iv) $\Delta(\Lambda)=\max\limits_{\substack{x,y,z,w\in[a,b]\\0\le i_1,i_2,i_3,i_4\le4}}\|\varphi^{(i_1)}(x_\varphi),\varphi^{(i_2)}(y_\varphi),\varphi^{(i_3)}(z_\varphi),\varphi^{(i_4)}(w_\varphi)\|.$

(v) $h_i=x_{i+1}-x_i$，$h=\max\limits_{0\le i\le n-1}h_i$

本文恒假定 $h\leqslant\min\left(1,\dfrac{3}{13}\cdot\dfrac{r}{\delta(\Lambda)}\right)$ (3)

引理

$$\Delta_i=-\frac{1}{12}r_ih_i^4+Kh_i^5,\quad |K|\leqslant\frac{13}{72}\delta(\Lambda)$$

$$\Delta_i^{-1}=-\frac{12}{r_i}h_i^{-4}-\frac{288}{r_i^2}K_1\cdot h_i^{-3},\ |K_1|\leqslant|K|\tag{4}$$

证 在 (x_i,x_{i+1}) 上将 φ,ψ,ξ,η 在 x_i 处进行 Taylor 展开，

$$\Delta_i=|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi'_i,\varphi'_{i+1}|=\left|\varphi_i,\ \varphi_i+\varphi'_ih_i+\frac{\varphi''_i}{2}h_i^2+\frac{\varphi'''_i}{6}h_i^3+\frac{\varphi^{(4)}(\alpha_i)}{24}h_i^4,\varphi'_i,\right.$$
$$\left.\varphi'_i+\varphi''_ih_i+\frac{\varphi'''_i}{2}h_i^2+\frac{\varphi^{(4)}(\beta_i)}{6}h_i^3\right|$$

这里 $\alpha_i,\beta_i\in(x_i,x_{i+1})$，当然，应注意到对于 φ,ψ,ξ,η 的展式中，相应的 α_i，β_i 是可能不同的。利用行列式的基本性质就不难得到

$$\Delta_i=-\frac{1}{12}r_ih_i^4+K\cdot h_i^5,\quad 而\ |K|\leqslant\frac{13}{72}\delta(\Lambda)$$

又 $\frac{1}{\Delta_i}=-\frac{12}{r_i h_i^4}\cdot\left(1-\frac{12K}{r_i}h_i\right)^{-1}$，由于假定（3），所以我们有 $\left|\frac{12K}{r_i}h_i\right|\leqslant\frac{12\cdot|K|}{r_i}\cdot\frac{3}{13}\frac{r}{\delta(\Lambda)}\leqslant\frac{1}{2}$。于是易得引理结论。

将解方程组（1′）得的 A,B,C,D 代入（1）可得 $\tau(x)$ 在 (x_i,x_{i+1}) 上的表达式为：

$$\tau(x)=\Delta_i^{-1}[|\varphi(x),\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi_{i+1}'|f_i+|\varphi_i,\varphi(x),\varphi_i',\varphi_{i+1}'|f_{i+1} +|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi(x),\varphi_{i+1}'|f_i'+|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi(x)|f_{i+1}'] \tag{5}$$

如果记 $H(x)$ 是 (x_i,x_{i+1}) 上对 $f(x)$ 的三次 Hermite 插值多项式，即 $H(x)$ 是满足下述条件的次数不超过三次的代数多项式：$H(x_j)=f_j$，$H'(x_j)=f_j'$，$j=i,\ i+1$。众所周知[2]，当 $f\in C^4[x_i,x_{i+1}]$时，有

$$|f(x)-H(x)|\leqslant\frac{1}{24}\|f^{(4)}\|_{[x_i,x_{i+1}]}\cdot(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2, \tag{6}$$

这里 $\|g\|_{[x_i,x_{i+1}]}=\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|g(x)|$。在下面，若 $g\in C^4[a,b]$，我们记 $\|g\|_4=\sum\limits_{i=0}^{4}\|g^{(i)}\|_{[a,b]}$。显然 $H(x)$ 也是 $\tau(x)$ 的三次 Hermite 插值多项式，因此，对于 $x\in(x_i,x_{i+1})$ 有

$$|\tau(x)-H(x)|\leqslant\frac{1}{24}\|\tau^{(4)}\|_{[x_i,x_{i+1}]}\ (x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2. \tag{7}$$

下面就来估计 $\|\tau^{(4)}\|_{[x_i,x_{i+1}]}$。从（5）两边微分，将 f_{i+1}，f_{i+1}' 在点 x_i 处用 Taylor 展式代替，整理可得：

$$\tau^{(4)}(x)=\Delta_i^{-1}[m_1f_i+m_2f_i'+m_3f_i''+m_4f_i'''+m_5\cdot k_2\cdot h_i^4+m_6\cdot k_3\cdot h_i^3], \tag{8}$$

这里

$$m_1=|\varphi^{(4)}(x),\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi_{i+1}'|+|\varphi_i,\varphi^{(4)}(x),\varphi_i',\varphi_{i+1}'|,$$

$$m_2=|\varphi_i,\varphi^{(4)}(x),\varphi_i',\varphi_{i+1}'|h_i+|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi^{(4)}(x),\varphi_{i+1}'|+|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi^{(4)}(x)|,$$

$$m_3=|\varphi_i,\varphi^{(4)}(x),\varphi_i',\varphi_{i+1}'|\cdot\frac{h_i^2}{2}+|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi^{(4)}(x)|h_i,$$

$$m_4=|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi^{(4)}(x),\varphi_{i+1}'|\cdot\frac{h_i^3}{6}+|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi^{(4)}(x)|\cdot\frac{h_i^2}{2},$$

$$m_5=|\varphi_i,\varphi^{(4)}(x),\varphi_i',\varphi_{i+1}'|,$$

$$m_6=|\varphi_i,\varphi_{i+1},\varphi_i',\varphi^{(4)}(x)|,$$

$$|K_2|\leqslant\frac{1}{24}\|f^{(4)}\|_{[a,b]},\qquad |K_3|\leqslant\frac{1}{6}\|f^{(4)}\|_{[a,b]}.$$

用行列式的基本性质，我们不难得到下列的估计式：

$$\begin{aligned}&|m_1|\leqslant\frac{7}{24}\Delta(\Lambda)\cdot h_i^4, && |m_2|\leqslant\frac{7}{18}\Delta(\Lambda)\cdot h_i^4, && |m_3|\leqslant\frac{5}{12}\Delta(\Lambda)\cdot h_i^4\\ &|m_4|\leqslant\frac{5}{12}\Delta(\Lambda)\cdot h_i^4, && |m_5|\leqslant\Delta(\Lambda)\cdot h_i, && |m_6|\leqslant\Delta(\Lambda)h_i.\end{aligned} \tag{9}$$

将（9）代入（8），得

$$\begin{aligned}|\tau^{(4)}(x)|&\leqslant\frac{41}{18}\|f\|_4\cdot h_i^4\cdot\Delta(\Lambda)\cdot|\Delta_i|^{-1}\\&\leqslant\frac{41}{18}\|f\|_4\cdot h_i^4\cdot\Delta(\Lambda)\cdot\left(\frac{12}{r_i}h_i^{-4}+\frac{288}{r_i^2}|K_1|\cdot h_i^{-3}\right).\end{aligned}$$

注意到 $|K_1|\leqslant|K|$ 以及（3），遂有 $|K_1|\cdot h_i\leqslant\frac{13}{72}\delta(\Lambda)\frac{3}{13}\cdot\frac{r}{\delta(\Lambda)}=\frac{1}{24}r$。

因此

$$|\tau^{(4)}(x)|\leqslant\frac{164}{3}\frac{\Delta(\Lambda)}{r}\cdot\|f\|_4. \tag{10}$$

由（6），（7），（10），当 $f(x)\in C^4[a,b]$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x)-\tau(x)|&\leqslant|f(x)-H(x)|+|H(x)-\tau(x)|\\&\leqslant\frac{1}{24}\left[\frac{164}{3}\cdot\frac{\Delta(\Lambda)}{r}+1\right]\|f\|_4\cdot(x-x_i)^2\cdot(x-x_{i+1})^2,\quad x\in(x_i,x_{i+1}).\end{aligned}$$

于是我们已经证明了下述的

定理 设 $-\infty<a<b<\infty$，任一分划 Δ_n：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$h=\max\limits_i(x_{i+1}-x_i)$，如果 $h\leqslant\min\left(1,\frac{3}{13}\cdot\frac{r}{\delta(\Lambda)}\right)$，则对任一 $f(x)\in C^4[a,b]$，存在唯一的 Hermite—Λ 插值样条，且有

$$|f(x)-\tau(x)|\leqslant\frac{1}{24}\left[\frac{164}{3}\cdot\frac{\Delta(\Lambda)}{r}+1\right]\|f\|_4\cdot(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2,$$
$$x\in(x_i,x_{i+1}),\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

例 取 $\Lambda=D^4+D^2$，此时 N_Λ 的一组基是 $1,x,\cos x,\sin x$，易见有 $r(x)\equiv1$，$\delta(\Lambda)=2$，$\Delta(\Lambda)<24$。由定理可知，当 $h<\frac{3}{26}$ 时，有

$$|f(x)-\tau(x)|\leqslant55\|f\|_4\cdot(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2,\quad x\in(x_i,x_{i+1}),\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

参 考 文 献

[1] Prenter, P. M., *Splines and Variational methods*, WI publication, New York, 1975.
[2] 纳唐松，И. П.，函数构造论，科学出版社，1958.

Hermite—Λ Interpolating Splines

Wu Zhenchang Sha Zhen
(Zhejiang University)

Abstract

In this short note, we discuss a kind of splines which are associated with some linear differential operators. These Splines are called Hermite-Λ interpolating splines which may be regarded as a generalization of piecewise Hermite interpolations. The main result is: Let $f(x)\in C^4[a,b]$, $\tau(x)$ be the Hermite-Λ interpolating spline to $f(x)$, if h is sufficiently small, then $|f(x)-\tau(x)|\leqslant\frac{1}{24}\left[\frac{164}{3}\cdot\frac{\Delta(\Lambda)}{r}+1\right]\cdot\|f\|_4\cdot(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$, $x\in(x_i,x_{i+1})$.