第4卷 第1期 1984年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.1 Jan. 1984

关于Dafermos折线逼近法的注记*

郑永树

（华侨大学）

关于没有凸条件的单个守恒律的初值问题存在性的研究，C. M. Dafermos 在文[1]中提出一种新方法——折线逼近法．然而，正如文[1]作者指出：这种方法提供了一种数值解法，遗憾的是还缺少下述保证："只需有限步就可构作出逼近方程带阶梯初值的整体广义解．"在本注记中，我们给出了这个保证．

折线逼近法之所以值得注意，不仅由于所得的逼近解结构清楚，可以用作数值计算，而且可以用来研究气体动力学方程组，甚至可能推广到更一般的守恒律组．目前这方面的研究已经开始[2]．

我们将仿照文[3]证明用有限步构作整体广义解的做法．为了节省篇幅，我们认为读者熟悉文[1]，本文将沿用其中的提法、条件、结果和符号，不再声明．

设 $u(x, t)$ 为文[1]引理3.2中初值问题（3.2）、（3.7）用 Dafermos 格式构造出的可容解．又令 $t=t_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，$(t_0=0)$ 为构造可容解过程中的起始线．因此，可以证得如下定理：

定理 $\{t_k\}$ 只有有限个值，即起始线只有有限条．

在证明此定理之前，先给出以下定义及引理：

定义 （Ⅰ）$D(\bar{t})$ $(\bar{t}\geqslant 0$，下同）表示 $u(x, \bar{t})$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的间断点之个数．$V(\bar{t}, \bar{x})\equiv V[\bar{t}, u(\bar{x}-0, \bar{t}), u(\bar{x}+0, t)]$ 表示 $f_n(u)$ 在 $u(\bar{x}-0, \bar{t})$ 与 $u(\bar{x}+0, \bar{t})$ 之间的顶点个数．其中 $\bar{x}$ 为 $u(\cdot, \bar{t})$ 的间断点，$u(\bar{x}\pm 0, \bar{t})=\lim\limits_{x\to\bar{x}\pm 0} u(x, \bar{t})$．

置

$$A(\bar{t})=D(\bar{t})+\sum_{x_k} V(\bar{t}, x_k),$$

其中 x_k 为 $u(\cdot, \bar{t})$ 的间断点．

（Ⅱ）任意两条间断线（即满足文[1]中条件（2.4）和（2.5）的间断线），如果它们的左极限（系指 $u(x, t)$ 在间断线处的左极限．其余意义相同．）与右极限之差同号，则称为同向间断线；反之称它们为异向间断线．

同向间断线的交点称为第一类间断交点；含有异向间断线的间断线之交点，称为第二类间断交点．

* 1982年12月16日收到．推荐者：林龙威（华侨大学）．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

（Ⅲ）只包含第一类间断交点的起始线称为第一类起始线；否则称为第二类起始线。

引理1 函数 $A(t)$ （$t\geqslant 0$）具有以下性质：

（i） $A(t)$ 为阶梯的右连续函数，即有

$$A(t)\equiv A(t_k),\quad t_k\leqslant t<t_{k+1},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

（ii）若 $t=t_k$ （$k\geqslant 1$）为第一类起始线，则

$$A(t_k-0)\geqslant A(t_k);$$

若 $t=t_k$ （$k\geqslant 1$）为第二类起始线，则

$$A(t_k-0)>A(t_k).$$

此引理可由文[1]中的命题2.1，分段线性函数 $f_n(u)$ 的性质，以及上述定义得到证明。为节约篇幅，这里不给出其证明过程。

引理2 从第一类间断交点处只能发出一条间断线。

这是单个守恒律的Riemann问题解的一个习知结果，同样也不再详证。

定理的证明 据引理1的性质（ii）及引理2，两条第二类起始线之间只有有限条第一类起始线。由于函数 $A(t)$ 只取正整数值，又由引理1的性质（ii）知道，$A(t)$ 经过第二类起始线，其值至少减小1，据此，以及引理1的性质（i），可知第二类起始线只能有限条。因此必存在正整数 K，使当 $k>K$ 时，或者不存在起始线 $t=t_k$；或者 $t=t_k$ 均为第一类起始线。若出现前者情形，则定理得证；否则，再援用引理2得，当 $k>K$ 时，第一类起始线 $t=t_k$ 也为有限条。故得定理的结论成立。

笔者感谢林龙威教授的热情指导。

参考文献

[1] Dafermos, C. M., Polygonal Approximations of Solutions of the Initial Value Problem for a Conservation Law, *J. Math. Anal. and Appl.*, 38(1972), 33—41.

[2] 林龙威，气体动力学方程组的折线逼近（Ⅰ），（待发表）.

[3] 林龙威，没有凸条件的一阶准线性方程式的初值问题的整体广义解，吉林大学自然科学学报，No 2 (1979), 17—26.

A Note on Dafermos' Polygonal Approximations Method

Zheng Yong-shu

(Huaqiao University)

Abstract

The remark in [1] shows that the polygonal approximations suggests the numerical method of construction of a solution of the initial value problem of a conservation law for piecewise linear $f(u)$ and $u_0(x)$ a step function. Unfortunately, there is no guarantee that one can reach by this procedure every point $t\in[0,\infty)$ in a finite number of steps. In the present note, we give this guarantee.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.