第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan. 1984

非齐次可列马尔可夫过程的轨道性质*

来向荣

（北京工业大学 应用数学系）

§1 状态分类

定义 1.1 设 I 是非负整数集，$P=\{P_{ij}(s,t)\mid i,j\in I,\ a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$ 是转移函数矩阵。称 P 对 i 在 t 右标准，若 $\lim\limits_{h\downarrow 0}P_{ii}(t,t+h)=1$；称 P 对 i 在 t 左标准，若 $\lim\limits_{h\downarrow 0}P_{ii}(t-h,t)=1$。若 P 对 i 在 t 同时为右标准的和左标准的，则称 P 对 i 在 t 标准。若 P 对 i 在每个 t 标准，则称 P 对 i 标准。P 对 i 右标准或左标准与此类似。若 P 对每个 i 标准，则称 P 标准。P 右标准或左标准与此类似（参看[5]、[6]）。

定义 1.2 以 $V_{1-P_{ii}}(a,b)$ 表 $1-P_{ii}(s,t)$ 在$[a,b]$的变差，简记为 $V_i(a,b)$。令 $V_i(t+0)=\lim\limits_{\Delta t\downarrow 0}V_i(t,t+\Delta t)$，$V_i(t-0)=\lim\limits_{\Delta t\downarrow 0}V_i(t-\Delta t,t)$，参看[2]。称 i 在 t 右（左）瞬变，若 $V_i(t+0)=\infty[V_i(t-0)=\infty]$；称 i 在 t 右(左)稳定，若 $V_i(t+0)=0[V_i(t-0)=0)]$；称 i 在 t 瞬变，若 $V_i(t+0)=\infty$ 或 $V_i(t-0)=\infty$；称 i 在 t 稳定，若 $V_i(t+0)=0$，$V_i(t-0)=0$。

定理 1.1 i 在每个 $t\in[a,b]$稳定（在 a 为右稳定，在 b 为左稳定，以下同），则 $V_i(a,b)<\infty$。

证 若 $V_i(a,b)=\infty$，则由二分法及区间套定理知，存在 $t\in[a,b]$，使 $V_i(t+0)$ 或 $V_i(t-0)$ 为∞，得矛盾。

定理 1.2 P 对 i 标准，$V_i(a,b)<\infty$，则 i 在每个 $t\in[a,b]$稳定。

证 由于 $1-P_{ii}(s,t)$连续（参看[5]、[6]），再由[6]引理3知，对一切 $t\in(a,b)$，有 $V_i(t+0)=V_i(t-0)=0$，并且$V_i(a+0)=V_i(b-0)=0$。

系 1 P 对 i 标准，$V_i(t+0)<\infty[V_i(t-0)<\infty]$，则 $V_i(t+0)=0[V_i(t-0)=0]$。

这就是说，当 P 对 i 标准，则 i 在每个 t 的右方或左方，只能为瞬变与稳定二者之一，i 在每个 t 也只能为瞬变与稳定二者之一。当 P 对 i 右（左）标准，i 在每个 t 的右（左）方，只能为瞬变与稳定二者之一。

系 2 P 对 i 标准，则 i 的右稳定时刻为一些左闭右开区间之和，i 的左稳定时刻为一些左开右闭区间之和，i 的稳定时刻为开集，i 的瞬变时刻为闭集。

---

* 1981年5月1日收到。

本文原是作者1964年在北京大学陈家鼎老师指导下的毕业论文的一部分，作者谨向陈老师衷心致谢。

§2 轨道性质

设 (Ω,F,p) 是完全的概率空间，$\{x_t(\omega),\ t\in T\}$ 是其上取值于 $\bar{I}$ 的马尔可夫过程，I 是过程的最小状态空间，$T=[a,b]$，$P=\{P_{ij}(s,t)\}$ 是过程的转移概率矩阵，$\bar{I}=I\cup\{\infty\}$ 表 I 的完备化拓扑空间．加在过程上的可分性条件用（S）表示，加在过程上的可测性条件用（M）表示，以（SM）表示二者兼有．对 $i\in\bar{I}$，令 $P_i(t)=p(x_t=i)$，令 $S_i(\omega)=\{t|x_t(\omega)=i\}$．用[5]、[6]中转移函数的连续性结果，仿齐次情形，可得以下的二定理．

定理 2.1 $(SM)P$ 右标准，则 $p\{\mu[S_i(\omega)]=0\}=1$ 的充要条件是 $i=\infty$．其中，μ 表勒贝格测度．

定理 2.2 (M) P 右标准，$i\neq\infty$，并有某个 $t>\varepsilon>0$，使 $P_i(t)>0$，则条件期望

$$E\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\mu[(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\cap S_i(\omega)]|x_t=i\right\}$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\left[\frac{1}{P_i(t)}P_i(t-s)P_{ii}(t-s,t)+P_{ii}(t,t+s)\right]ds.$$

下面定理的证明可参看[7]定理１．

定理 2.3 (S) P 标准，$s\geqslant0$，$t>0$，则当 $p(x_s=i)>0$ 时，有 $p\{x_u=i,\ u\in(s,s+t)|x_s=i\}=e^{-V_i(s,s+t)}$．

顺便指出，当 $q_i(u)=\lim\limits_{h\downarrow0}\dfrac{1-P_{ii}(u,u+h)}{h}$ 在勒贝格测度意义下 $a.a.$ 存在时，用[1]第一四八页的方法来证本定理，可得 $V_i(s,s+t)=\int_s^{s+t}q_i(u)\,du$．

用本定理，仿齐次情形，可证下面的定理 2.4．在证定理 2.4(2) 的后一部分时，要用到[6]系4．

定理 2.4 （S）设 P 标准．(1) 若 i 在 t 右瞬变，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一个以 t 为左端点的左闭右开区间$\}=0$．若 i 在 t 左瞬变，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一个以 t 为右端点的开区间$\}=0$．若 i 在 t 瞬变，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一个含 t 的开区间$\}=0$．(2) 若 i 在 t 右稳定，则当 $p\{x_t=i\}>0$ 时，$p\{S_i(\omega)$ 包含一个以 t 为左端点的开区间$|x_t=i\}=1$，且存在 t 的可数集 R，当 $t\bar{\in}R$ 时，如 i 在 t 左稳定，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一个以 t 为右端点的开区间$|x_t=i\}=1$，如 i 在 t 稳定，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一个含 t 的开区间$|x_t=i\}=1$．

定义 2.1 设 i 在每个 t 稳定，$\alpha<\beta$，$\langle\alpha,\beta\rangle$ 是包含端点或不包含端点的区间．称 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 为 $x_\cdot(\omega)$ 的一个 i 线节，如果 $\langle\alpha,\beta\rangle\subset S_i(\omega)$，并且当 $\langle\alpha,\beta\rangle\subset\langle\gamma,\delta\rangle\subset S_i(\omega)$ 时，有 $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\gamma,\delta\rangle$．

下面的定理相当于[7]定理３系２．

定理 2.5 （S）P 标准，i 在每个 t 稳定，则对 $a.a.\omega$，$S_i(\omega)$ 是有穷个 i 线节之和，每二 i 线节之间有正距离．

系 1 （S）P 标准，i 在 t 右稳定，则对 $a.a.\omega$，$S_i(\omega)$ 在 t 的充分小的右邻域是有穷个两两有正距离的 i 线节之和．P 标准，过程左随机连续，i 在 t 左稳定，则对 $a.a.\omega$，$S_i(\omega)$ 在 t 的充分小的左邻域是有穷个两两有正距离的 i 线节之和．P 标准，i 在 t 稳定，则对 $a.a.\omega$，$S_i(\omega)$ 在 t 的充分小的邻域是有穷个两两有正距的 i 线节之和．

系 2　$(S)P$标准，所有状态皆在每个 t 稳定，则对 $a.a.\omega$，在任意 t，当 $s\downarrow t$ 或 $s\uparrow t$ 时，$x_s(\omega)$ 收敛到有穷极限或趋于∞。

定义 2.2　称具有定理 2.5 系 2 性质的过程为广义阶梯过程。

由[1]第一五九页知，在齐次情形下，所有状态稳定是广义阶梯过程的充要条件。后面的定理 2.15 系 3 表明，这个论断在非齐次时也对。

由定理 1.2，又可得

系 3　(S) P 标准，$V_i(a,b)<\infty$，则定理 2.5 的结论成立。

定理 2.6　(S) P 标准，则对 $a.a.\omega$，在任意 t，当 $x_t(\omega)=i$，i 在 t 右稳定时，有 $\lim\limits_{s\downarrow t}x_s(\omega)=i$。

证　由定理 1.2 系 2，可令 i 的右稳定时刻集为$[a_n,b_n)$，$n\geqslant 1$。又令 M_n 为在每个$[a_n,b_n)$ 上按定理 2.5 所得的例外集，R是一个取定的可分集。由可分性及右随机连续性知，存在Λ，$p(\Lambda)=0$，在任意 t 及 $\omega\bar{\in}\Lambda$，当 $x_t(\omega)=i$，有 $r_n\in R$，$r_n\downarrow t$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{r_n}(\omega)=i$。对 $r\in R$，设 N_r 为从 $x_r(\omega)=i$ 按定理 2.4(2) 所得的例外集。令$\omega\bar{\in}[(\bigcup\limits_n M_n)\cup\Lambda\cup(\bigcup\limits_{r\in R}N_r)]$，则 $\lim\limits_{s\downarrow t}x_s(\omega)=i$。

定理 2.7　$(S)P$ 右标准，则对 $a.a.\omega$，在任意 t，当 $s\downarrow t$ 时，$x_s(\omega)$ 至多只有一个有穷极限点。

证明仿[7]定理 4。顺便指出，[7]定理 4 是在 P 标准的假设下对 $s\downarrow t$ 作出证明的，它认为在同样假设下对 $s\uparrow t$ 的证明是类似的。但在非齐次的情形，这二者之间有实质的差别。

系　$(S)P$ 右标准，过程左随机连续，则对 $a.a.\omega$，在任意 t，当 $s\uparrow t$ 时 $x_s(\omega)$ 至多只有一个有穷极限点。

顺便指出，在齐次情形，定理 2.7 及其系是[4]定理 VI(i) 的特款，而在非齐次情形，则没有这种包含关系。

由定理 2.7，仿齐次情形，可证下面的定理。

定理 2.8　$(S)P$右标准，则对 $a.a.\omega$ 及 $i\neq j$ 并且 i 与 j 皆不为∞，$\overline{S_i(\omega)}\cap\overline{S_j(\omega)}$ 的点是右方孤立的，故至多为可数集 [$\overline{S_i(\omega)}$ 表 $S_i(\omega)$ 的闭包]。

系　$(S)P$ 右标准，过程左随机连续，则对 $a.a.\omega$ 及 $i\neq j$ 并且 i 与 j 皆不为 ∞，$\overline{S_i(\omega)}\cap\overline{S_j(\omega)}$是有穷集。

定义 2.3　设$\{x_t(\omega),t\in T\}$是随机过程。称它是右可分的，若存在T的可数稠集R，对 $a.a.\omega$，在任意 t，有 $r_n\in R$，$r_n\downarrow t$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{r_n}(\omega)=x_t(\omega)$。

定理 2.9　(S) P右标准，R是一可分集，则存在修正$\{\tilde{x}_t\}$对R可分，波来尔可测，所有的样本函数右下半连续。对 $a.a.\omega$，在任意t，有 $\tilde{x}_t(\omega)=x+(t,\omega)\equiv\underline{\lim}_{s\downarrow t}x_s(\omega)$。

证　由假设，所给过程$\{x_t\}$右随机连续，因而右完全可分[仿[3]定理 Ⅱ.2.2(i)] ∴有$\Lambda,p(\Lambda)=0$，当 $\omega\bar{\in}\Lambda$，在任意 t，存在 $r_n\in R,r_n\downarrow t$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{r_n}(\omega)=x_t(\omega)$。又对每 t，有 $\Lambda_t,p(\Lambda_t)=0$，当 $\omega\bar{\in}\Lambda_t$，则 $x_t(\omega)\neq\infty$ 再设N是定理 2.7 的例外集。令 $\omega\bar{\in}[\Lambda\cup\Lambda_t\cup N]$，则$\underline{\lim}_{s\downarrow t}x_s(\omega)=x_t(\omega)$。于是，[1]第一五七页定理的条件全部满足，而该定理对任一完全可分的随机过程成立。

系 1 (S) P右标准，过程左随机连续，R是一可分集，则存在修正$\{\hat{x}_t\}$对R可分，波来尔可测，所有的样本函数左下半连续．对$a.a.\omega$，在任意t，有$\hat{x}_t(\omega)=x_-(t,\omega)\equiv\varliminf_{s\uparrow t}x_s(\omega)$．

系 2 (S) P右标准，过程左随机连续，R是一可分集，则存在修正$\{\check{x}_t\}$对R可分，波来尔可测，所有的样本函数下半连续．对$a.a.\omega$，在任意t，有$\check{x}_t(\omega)=\underline{x}(t,\omega)\equiv\varliminf_{s\to t}x_s(\omega)$．

仿齐次情形，可证以下定理．

定理 2.10 对定理2.9中的$\{x_+\}$及$a.a.\omega$，$\overline{S_i(\omega)}\cap S_\infty(\omega)$的点是右方孤立的．对定理2.9系1中的$\{x_-\}$及$a.a.\omega$，$\overline{S_i(\omega)}\cap S_\infty(\omega)$的点是左方孤立的．在上述两种情况下，$\overline{S_i(\omega)}\cap S_\infty(\omega)$至多是可数集．对定理2.9系2中的$\{\underline{x}\}$及$a.a.\omega$，$\overline{S_i(\omega)}\cap S_\infty(\omega)$是空集．

定理 2.11 (S) (1) P标准，t固定，如对$a.a.\omega,x_s(\omega)$当$s\downarrow t$时恰有二极限点i和∞，则i在t右瞬变；P标准，过程左随机连续，t固定，如对$a.a.\omega,x_s(\omega)$当$s\uparrow t$时恰有二极限点i和∞，则i在t左瞬变．(2) P标准，t固定，如对$a.a.\omega$，$x_s(\omega)$当$s\downarrow t(s\uparrow t)$时收敛到$i\neq\infty$，则$i$在$t$右（左）稳定．

证 (1) 当$s\downarrow t$，有$N_t,p(N_t)=0$，如$\omega\bar{\in}N_t$，则$t\in\overline{S_i(\omega)}$，但后者不能包含以$t$为左端的区间，∴由定理2.5系1知，$i$在$t$不是右稳定的．下一个结论类似．(2)由定理2.4(1)得．

定理 2.12 (S) P标准．(1)如对$a.a.\omega$，在任意t，$x_t(\omega)=i$，i在t右稳定，则$\lim_{s\downarrow t}x_s(\omega)=i$；(2) 固定$t$，如对$a.a.\omega$，$x_t(\omega)=i$，$i$在$t$右瞬变，则$x_s(\omega)$在$s\downarrow t$时恰有二极限点$i$和$\infty$．

证 (1) 即定理2.6；(2) 由右随机连续性知，存在$r_n\downarrow t$及Λ_t，$p(\Lambda_t)=0$，当$\omega\bar{\in}\Lambda_t$且$x_t(\omega)=i$，有$\lim_{n\to\infty}x_{r_n}(\omega)=i$．记定理2.4(1)的0测集为$N_t$，记定理2.7的例外集为$M$，令$\omega\bar{\in}[\Lambda_t\cup N_t\cup M]$，则一方面，$i$不能是$x_s(\omega)$当$s\downarrow t$时的唯一极限点，另一方面，$x_s(\omega)$当$s\downarrow t$时又最多只有一个有穷极限点，∴得证．

系 (S) P标准，过程左随机连续．(1) 如对$a.a.\omega$，在任意t，$x_t(\omega)=i$，i在t左稳定，则$\lim_{s\uparrow t}x_s(\omega)=i$；(2) 固定$t$，如对$a.a.\omega$，$x_t(\omega)=i$，$i$在$t$左瞬变，则$x_s(\omega)$当$s\uparrow t$时恰有二极限点$i$和$\infty$．

由定理2.7及定理2.11，定理2.12，仿齐次情形，可证以下定理．

定理 2.13 (S) P标准，则对$a.a.\omega$，在任意t，当$s\downarrow t$时只有下面三种情况：(a) $x_s(\omega)\to i$，i在t右稳定；(b) $x_s(\omega)$恰有二极限点i和∞，i在t右瞬变；(c) $x_s(\omega)\to\infty$．更有：(α) 若$x_t(\omega)=i$，i在t右稳定，则(a)成立；(β) 若$x_t(\omega)=i$，i在t右瞬变，则(b)成立，但例外集和t有关；(γ)对$\{x_+\}$，若$x_+(t,\omega)=\infty$，则(c)成立．

系 (S) P标准，过程左随机连续，则对$a.a.\omega$，在任意t，当$s\uparrow t$时只有下面三种情况：(a) $x_s(\omega)\to i$，i在t左稳定；(b) $x_s(\omega)$恰有二极限点i和∞，i在t左瞬变；(c) $x_s(\omega)\to\infty$．更有：(α) 若$x_t(\omega)=i$，i在t左稳定，则(a)成立；(β) 若$x_t(\omega)=i$，i在t左瞬变，则(b)成立，但例外集和t有关；(γ)对$\{x_-\}$，若$x_-(t,\omega)=\infty$，则(c)成立．

定义 2.4 称去掉端点的i线节为开稳定区间．

定理 2.14　(S) P 标准，则对每个 t，有 Λ_t，$p(\Lambda_t)=0$，当 $\omega\overline{\in}\Lambda_t$，$t$ 或属于一个开稳定区间，或属于以下各集之一：(a) $\overline{S_i(\omega)}\cap X_2^{(i)}$，$X_2^{(i)}$ 是 i 的左或右瞬变时刻集，$\overline{S_i(\omega)}$ 是完备集；(b) $S_\infty^*(\omega)\equiv\{t\mid\lim\limits_{s\to t}x_s(\omega)=\infty\}$，当过程可测时，此集为 0 测集；(c) $\overline{S_i(\omega)}\cap S_\infty(\omega)\cap R_1^{(i)}$，$R_1^{(i)}$ 是 i 的右稳定时刻集；(d) $\overline{S_i(\omega)}\cap S_\infty^{**}(\omega)\cap L_1^{(i)}$，$L_1^{(i)}$ 是 i 的左稳定时刻集，$S_\infty^{**}(\omega)\equiv\{t\mid\lim\limits_{s\downarrow t}x_s(\omega)=\infty\}$；(e) $\overline{S_i(\omega)}\cap\overline{S_j(\omega)}\cap R_1^{(i)}\cap L_1^{(j)}$ $(i\neq j)$，至多为可数集。

证　1° 设 $x_-(t,\omega)=\infty$。这时，$\lim\limits_{s\uparrow t}x_s(\omega)=\infty$，∴与定理 2.13 当 $s\downarrow t$ 时的三种情况相应，t 分别属于(c)，(a)，(b)；2° 设 $x_-(t,\omega)=i$，i 在 t 左稳定。这时，有 $\delta>0$，使 i 在 $[t-\delta,t]$ 稳定，∴$\lim\limits_{s\uparrow t}x_s(\omega)=i$。若 $s\downarrow t$ 时 $x_s(\omega)\to i$，则 t 属于一个开稳定区间，若 $s\downarrow t$ 时 $x_s(\omega)\to j$，$j\neq i$，则 j 在 t 右稳定，而 (e) 中 i 与 j 对称，∴$t\in$(e)，若 $s\downarrow t$ 时 $x_s(\omega)\to\infty$，则 $t\in$(d)，若 $s\downarrow t$ 时 $x_s(\omega)$ 恰有二极限点 k 和 ∞，则 k 在 t 右瞬变，∴$t\in$(a)；3° 当 $x_-(t,\omega)=i$，i 在 t 左瞬变。这时，$t\in\overline{S_i(\omega)}$，∴$t\in$(a)。$\overline{S_i(\omega)}$ 是完备集由可分性及右随机连续性得。并且，只要 $i\neq\infty$，这就对。$S_\infty^*(\omega)$ 为 0 测集由可分性及定理 2.1 得。(e) 中的集至多可数由定理 2.8 得。

定理 2.15　(S) P 标准，t 固定。如所有状态皆在 t 左稳定，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一以 t 为右端的开区间 $|x_t=i\}=1$；如所有状态皆在 t 稳定，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一含 t 的开区间 $|x_t=i\}=1$。其中，i 为任一状态，$p\{x_t=i\}>0$。

证　如所有状态皆在 t 稳定，则 $p\{S_i(\omega)$ 包含一含 t 的开区间 $|x_t=i\}\geqslant p\left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[S_i(\omega)\supset\left[t-\frac{1}{n},t+\frac{1}{n}\right)\right]\Big|x_t=i\right\}\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}p\left\{x_u=i,u\in\left[t-\frac{1}{n},t+\frac{1}{n}\right)\Big|x_t=i\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}P_i\left(t-\frac{1}{n}\right)\Big/P_i(t)$ $=P_i(t-0)/P_i(t)$。若右式 <1，则 $\sum\limits_i P_i(t-0)<\sum\limits_i P_i(t)=1$。但 $\sum\limits_i P_i(t-0)=\sum\limits_i\lim\limits_{n\to\infty}P_i\left(t-\frac{1}{n}\right)\geqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sum\limits_i P_i\left(t-\frac{1}{n}\right)=1$，得矛盾。∴$P_i(t-0)\geqslant P_i(t)$。∴后一结论得证。前一结论类似。

系 1　(S) P 标准，t 固定，所有状态皆在 t 左稳定，则对任一状态 i，$P_i(\cdot)$ 在 t 左连续。

证　由定理 2.15 的证明知，这时 $P_i(t-0)=P_i(t)$。

系 2　(S) P 标准，t 固定，所有状态皆在 t 左稳定，则过程在 t 左随机连续。

证　当 $t\geqslant s$ 时，有 $p\{x_t=x_s\}=\sum\limits_j P_j(S)P_{jj}(s,t)$，∴由系 1 得 $\lim\limits_{s\uparrow t}p\{x_t=x_s\}\geqslant\sum\limits_j p_j(t)=1$。∴$\lim\limits_{s\uparrow t}p\{x_s=x_t\}=1$。

系 3　(S) P 标准，则所有状态在每个 t 稳定是广义阶梯过程的充要条件。

证　必要性由定理 2,5 系 2 得，充分性由定理 2.13 和定理 2.13 的系及定理 2.15 系 2 得。

系 4　(S) P 标准，则广义阶梯过程的充要条件是对所有的状态 i，$V_i(a,b)<\infty$。

证　由定理 1.1，定理 1.2 及定理 2.15 系 3 得。

顺便指出：(1) 定理 2.15 与定理 2.4(2) 的第二部分并不相同；(2) [1]第一六〇页定理 7.5 的系，是本文定理 2.5 系 2 的特款。

最后指出：以上在讨论非齐次可列马尔可夫过程的轨道性质时用到的过程的分析性质，[8]已证明在抽象空间中仍然成立。因此，上述与状态空间的可列性无关的结果，可以立即推广到抽象空间中去。这就是说，抽象空间中非齐次马尔可夫过程的瞬变状态和稳定状态的分类问题得到解决，并有一系列轨道性质的结果。

采用[8]的记号[在状态空间中的极限过程，是将状态空间假设为拓扑可测空间之后来谈的。在讨论可分性时，设 $(E,\mathscr{C})$ 是有可列基的列紧空间，$\sigma(\mathscr{C})$ 是包含所有开集的最小 σ 代数，随机过程 $\{x_t(\omega),t\in T\}$ 在 $(E,\sigma(\mathscr{C}))$ 取值]，简记 $P_{xy}(s,t)=P(s,t,x,\{y\})$，仿本文的定义1.1定义状态 x 的右（左）标准性和标准性，仿本文的定义1.2定义 x 在 s 的右（左）瞬变性、右（左）稳定性和 x 在 s 的瞬变性与稳定性，并将本文中 $V_i(a,b)$，$V_i(t+0)$，$V_i(t-0)$，$S_i(\omega)$ 等记号相应地改写为 $V_x(a,b)$，$V_x(t+0)$，$V_x(t-0)$，$S_x(\omega)$ 等，则本文中不涉及状态空间的可列性的结果，都可以推广到抽象空间中的非齐次马尔可夫过程。

参　考　文　献

[1] Chung, K. L., Markov Chains with stationary transition probabilities, 1960.

[2] Добрушин, р. Л., Условия регулярности Марковских процессов с конечным числом возможных состояний, *М. С.*, 34 (1954).

[3] Doob, J. L., Stochastic processes, 1953.

[4] Kinney, J. R., Continuity properties of sample functions of Markov processes, *T. A. M. S.*, 74(1953).

[5] 朱成熹，非齐次马氏链的转移函数的分析性质（摘要），南开大学数学系1963年科学讨论会油印稿.

[6] 朱成熹，非齐次马尔科夫链的转移函数的分析性质，数学进展，8:1(1965).

[7] 朱成熹，非齐次马尔科夫链样本函数的性质，南开大学学报，自然科学，5:5(1964).

[8] 胡迪鹤，抽象空间中非时齐马氏过程的分析理论(I)，数学学报，22:4(1979).

Properties of Sample Functions of Denumerable and Nonhomogeneous Markov Processes

Lai Xiang-rong

Abstract

In this paper, states of denumerable and nonhomogeneous Markov Processes are divided into stationary and instantaneous, while theorems in pp. 144—160 in[1] are extended to denumerable and nonhomogeneous Markov processes. Moreover, it is shown that states of nonhomogeneous Markov processes in abstract space can be divided in similar manner, and some theorems of sample functions of denumerable and nonhomogeneous Markov processes can be extended to nonhomogeneous Markov processes in abstract space.