第4卷 第1期
1984年1月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.1
Jan. 1984

随机变数配重和的两个收敛定理*

王向忱

（吉林大学）

本文给出随机变数配重和几乎必然收敛的两个定理，同时讨论了可分赋范线性空间中随机元的相应推广.

定理1 设随机变数序列$\{X_n\}$的律一致地以一个随机变数X的律为界，即对所有n和$x\geqslant 0$，$P[|X_n|\geqslant x]\leqslant P[|X|\geqslant x]$，$\{a_{nk},\ n\geqslant 1,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$为双重实数组，使得$\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}^2=A<\infty$. 如果$E|X|^\alpha<\infty$，$0<\alpha<2$，则

$$n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X_k\to 0\qquad a.s.$$

证明

$$\limsup_{n\to\infty}|n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X_k|^2\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2\sum_{k=1}^{n}X_k^2/n^{\frac{2}{\alpha}}\leqslant A\ \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}X_k^2/n^{\frac{2}{\alpha}}.\qquad(1)$$

由于$\{X_k^2\}$的律一致地以X^2的律为界，$0<\frac{\alpha}{2}<1$，和$E(X^2)^{\alpha/2}=E|X|^\alpha<\infty$，利用稳定性定理([1]，p.387)，

$$n^{-\frac{2}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}X_k^2\to 0\qquad a.s.\qquad(2)$$

结合(1)和(2)，所求得证.

定理1是[2]中定理9（$1\leqslant\alpha<2$）的显著改进. Padgett和Taylor([3]，定理3)将定理9的特殊情形（$\alpha=1$）推广到可分Banach空间，Bozorgnia和Bhaskara Rao([4]，定理1)将定理9推广到可分Banach空间，Wei和Taylor将之($1\leqslant\alpha<2$)推广为可分赋范线性空间中随机元随机配重和的极限定理([5]，定理3)，所述定理均假设独立性，同分布，有些还要求均值中心化. 事实上，取消这些条件，同分布减弱为律一致地有界，它们都包含在下述推论中.

推论1 设$\{V_n\}$是可分赋范线性空间中随机元序列，$\{\|V_n\|\}$的律一致地以随机变数V的律为界，且对某个$\alpha\in(0,2)$，$E\|V\|^\alpha<\infty$. 设$\{a_{nk}\}$是随机变数双重组，存在常数A使得

*1982年12月15日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$P[\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^{2}\leqslant A]=1,$$

则
$$n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}V_{k}\to 0\qquad a.s.$$

证明 因为 $\|n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}V_{k}\|\leqslant n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}|a_{nk}|\|V_{k}\|$，$\{\|V_k\|\}$是随机变数序列，由定理1的证明即得所求.

定理2 设$\{C_n\}$是一实数序列，$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2=A<\infty$.

(i) 如果$\{X_n\}$是两两独立，同分布随机变数序列，$EX_1^2<\infty$，则

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}X_{k}\to 0.\qquad a.s.$$

(ii) 如果$\{X_n\}$是独立随机变数序列，其律一致地以随机变数X的律为界，X满足条件，$EX^2<\infty$，则$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}X_k\to 0$. $a.s.$

证明 对任意给定$\varepsilon>0$，存在正实数$M(\varepsilon)$使得$E|X_1|^2I_{[|X_1|>M]}<\varepsilon$. 定义

$$X_k'=X_kI_{[|X_k|\leqslant M]},\quad S_n'=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}X_k'$$

$$X_k''=X_kI_{[|X_k|>M]},\quad S_n''=n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}X_k''.$$

则
$$S_n''^{2}\leqslant n^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}^{2}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k''^{2}\Big)\leqslant A\Big(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k''^{2}\Big).$$

因为$\{X_k''^2\}$是两两独立，同分布随机变数序列，$EX_1''^2<\varepsilon$，利用定理1[6]，

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}X_k''^{2}\to EX_1''^{2}\qquad a.s.$$

所以
$$\limsup_{n\to\infty}S_n''^{2}\leqslant A\varepsilon\qquad a.s.\tag{3}$$

另有
$$|S_n'|=|n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}X_k'|\leqslant|n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{[(\sqrt{n}-1)^2]}C_{n-k}X_k'|+|n^{-\frac{1}{2}}\sum_{[(\sqrt{n}-1)^2]+1}^{n}C_{n-k}X_k'|,$$

$$|n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{[(\sqrt{n}-1)^2]}C_{n-k}X_k'|^2\leqslant\sum_{k=1}^{[(\sqrt{n}-1)^2]}C_{n-k}^2\sum_{k=1}^{[(\sqrt{n}-1)^2]}X_k'^2/n\leqslant M^2\sum_{[2\sqrt{n}-1]}^{\infty}C_i^2\to 0,$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$|n^{-\frac{1}{2}}\sum_{[(\sqrt{n}-1)^2]+1}^{n}C_{n-k}X'_k|^2\leqslant\sum_{[(\sqrt{n}-1)^2]+1}^{n}C_{n-k}^2\sum_{[(\sqrt{n}-1)^2]+1}^{n}X_k'^2/n$$

$$\leqslant AM^2\frac{n-[(\sqrt{n}-1)^2]}{n}\leqslant AM^2\frac{2\sqrt{n}}{n}\to 0.$$

综上所述，

$$\limsup_{n\to\infty}|n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}X_k|\leqslant\limsup_{n\to\infty}|S'_n|+\limsup_{n\to\infty}|S''_n|\leqslant A\varepsilon,\qquad a.s.$$

由于 ε 的任意性，(i)便证得。

为了证明(ii)，只要证明在相应条件下(3)成立。

令 F_k 和 F 分别为 $|X_k|$ 和 $|X|$ 的分布函数，则对任意正实数，

$$E|X_k|^2I_{[|X_k|>a]}=\int_a^\infty x^2dF_k(x)=2\int_a^\infty\int_a^x ydydF_k(x)+a^2P[|X_k|\geqslant a]$$

$$=2\int_a^\infty y(1-F_k(y))dy+a^2P[|X_k|\geqslant a]$$

$$\leqslant 2\int_a^\infty y(1-F(y))dy+a^2P[|X|\geqslant a]$$

$$=\int_a^\infty x^2dF(x)=E|X|^2I_{[|X|>a]}.$$

从而，若选择 M 使得 $E|X|^2I_{[|X|>M]}<\varepsilon$，则 $EX_k^2I_{[|X_k|>M]}<\varepsilon$，对任意 k 成立。$\{X_k^2I_{[|X_k|>M]}\}$ 是独立随机数序列，其律一致地以 $X^2I_{[|X|>M]}$ 的律为界，后者可积，因此([1]，p. 242)，$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k''^2-EX_k''^2)\to 0\quad a.s.$　这就意味(3)成立，$\limsup_{n\to\infty}S''_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}A\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k''^2\right)\leqslant A\varepsilon\quad a.s.$

当 $a=2$ 时，定理1[2]是上述定理2的特殊情形，至于 $1\leqslant a<2$ 是上述定理1的特殊情形。值得指出在均值处中心化是不必要的，这不仅减化了证明，而且使定理可以直接推广到随机元序列。

推论2　设 $\{C_n\}$ 是随机变数序列，使得 $P[\limsup_n\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2\leqslant A]=1$，其中 A 为一常数。

(i) 如果 $\{V_n\}$ 是一可分赋范线性空间中的随机元序列，两两独立，同分布。且 $E\|V_1\|^2<\infty$，则

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}V_k\to 0.\qquad a.s.$$

(ii) 如果 $\{V_n\}$ 是两两独立的，$\{\|V_n\|\}$ 的律一致地以随机变数 V 的律为界，V 满足条件，$E\|V\|^2<\infty$，则

$$n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}C_{n-k}V_k\to 0.\qquad a.s.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

[1] Loéve, M., Probability Theory. Van Nostrand, Princeton, 1963.

[2] Chow, Y. S. and Lai, T. L., Limiting Behavior of Weighted Sums of Independent Random Variables, *Ann. Prob.*, 1(1973), pp 810—824.

[3] Padgett, W. J. and Taylor, R. L., Almost Sure Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Banach Space, Probability in Banach Spaces, Lecture Notes in Mathematics, V 526, Springer—Verlag, Berlin(1976), pp 187—202.

[4] Bozorgnia, A. and Bhaskara Rao, M., On an Extension of Some Results of Chow and Lai on Limit Theorems for Weighted Sums of Independent Random Variables to Separable Banach Spaces. *Bull. Inst. Math., Acad. Sinica* 2 (1981), pp 359—365.

[5] Wei, D. and Taylor, R. L., Geometrical Consideration of Weighted Sums Convergence and Random Weighting. *Bull. Inst. Math., Acad. Sinica* 1 (1978), pp 49—59.

[6] Etemadi, N., An Elementary Proof of the Strong Law of Large Numbers. *Z. Wahr. verw. Geb.* 55 (1981), pp 119—122.

Two Convergence Theorems of Weighted Sums of Random Variables

Wang Xiangchen (王向忱)

Abstract

In the note we present two theorems on convergence of weighted sums of random variables. The relative extensions to random elements in a separable normed linear space are also discussed.

Theorem 1 and Corollary 1 are extensions of the theorems of Chow and Lai, Padgett and Taylor, Bozognia and Bhaskara Rao, and Wei and Taylor. Theorem 2 is an extension of another result of Chow and Lai.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.