第4卷 第1期
1984年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.1
Jan, 1984

平面图的理论与四色问题(II)

——五色定理与四色问题的形式*

刘彦佩

(中国科学院应用数学研究所)

§6 关于 Euler 公式[1-6]

令 ν, ε, φ分别表示一个平面图的节点，边和面(包括无限面)的数目。为方便，自然只讨论连通的平面图。这时，总有如下关系：

$$\nu-\varepsilon+\varphi=2. \tag{6.1}$$

这就是所谓Euler 公式。其证明也相当简单，通过对边施行归纳，即可得到。它是研究平面以致多面体有关的很多问题的基础。这里也将会看到它在研究四色问题中的作用。

记 $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}^*$ 分别为一个平面图的节点次和面次的平均值；k_i, k_i^* 分别表示次为 i 的节点数与面数。从而，有

$$\bar{\rho}=\frac{1}{\nu}\sum_i ik_i,\quad \bar{\rho}^*=\frac{1}{\varphi}\sum_i ik_i^*.$$

命题6.1 对任平面图G，总有

$$(\bar{\rho}-2)(\bar{\rho}^*-2)<4. \tag{6.2}$$

证明 由$\nu\bar{\rho}=2\varepsilon=\varphi\bar{\rho}^*$，和Euler公式，有

$$\varepsilon\left(\frac{2}{\bar{\rho}}-1+\frac{2}{\bar{\rho}^*}\right)=2,\quad \frac{2}{\bar{\rho}}-1+\frac{2}{\bar{\rho}^*}>0,\quad 2\bar{\rho}^*-\bar{\rho}\bar{\rho}^*+2\bar{\rho}=4-(\bar{\rho}-2)(\bar{\rho}^*-2)>0. \qquad \blacksquare$$

定理6.1 对任平面图G，若所有节点次不小于3，则存在一个面$f\in F$使得$\rho^*(f)\leqslant 5$.

证明 由(6.2)直接可得. $\blacksquare$

命题6.2 对任平面图，总有

$$\sum_i k_i(4-i)+\sum_i k_i^*(4-i)=8. \tag{6.3}$$

证明 由 Euler 公式,

$$4\sum_i k_i-\sum_i ik_i-\sum_i ik_i^*+4\sum_i k_i^*=8,$$

即

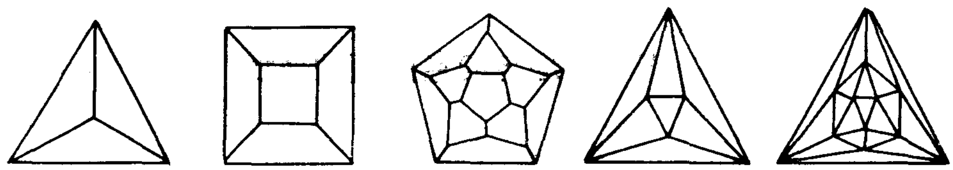
$$\sum_i(4-i)k_i+\sum_i(4-i)k_i^*=8. \qquad \blacksquare$$

* 1982年4月21日收到.

定理6.2 对任一平面图G，若无次不超过3的节点就有次不超过3的面。

证明 由(6.3)直接可得。 ▮

一个平面图，若所有面的次都相等，则称之为面正则。若一个面正则平面图的所有节点的次也都相等，即正则，则称之为全正则。图6.1所示的五种全正则平面图称为Plato图。



正四面体 正六面体 正十二面体 正八面体 正二十面体

图6.1 plato图

定理6.3 一个节点次和面次均不小于3的平面图是全正则的，当且仅当是一个Plato图。

证明 由(6.2)，只能有如下情况：$(\rho,\rho^*)=(3,3)$；$(3,4)$和它的对偶$(4,3)$；$(3,5)$和它的对偶$(5,3)$。这些就是如图6.1所给出的Plato图。 ▮

记α为某面边界上二相邻边在此面中之夹角，和

$$\phi(\alpha)=\frac{1}{\rho(v_\alpha)}+\frac{1}{\rho^*(f_\alpha)}-\frac{1}{2} \tag{6.4}$$

其中，v_α，f_α分别为角α的角顶和它所在的面。也记$\alpha \operatorname{ind} v_\alpha$，$\alpha \operatorname{ind} f_\alpha$。由Euler公式，得

$$\sum_\alpha \phi(\alpha)=\sum_\alpha \frac{1}{\rho(v_\alpha)}+\sum_\alpha \frac{1}{\rho^*(f_\alpha)}-\sum_\alpha \frac{1}{2}=\nu+\varphi-\varepsilon=2. \tag{6.5}$$

也称之为Lebegue公式。

进而，若对于$v\in V$，$e\in E$，$f\in F$，记

$$\phi(v)=\sum_{\alpha \operatorname{ind} v}\phi(\alpha)=1+\sum_{f \operatorname{ind} v}\frac{1}{\rho^*(f)}-\frac{1}{2}\rho(v);$$

$$\phi(f)=\sum_{\alpha \operatorname{ind} f}\phi(\alpha)=\sum_{v \operatorname{ind} f}\frac{1}{\rho(v)}+1-\frac{1}{2}\rho^*(f);$$

$$\phi(e)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha \operatorname{ind} e}\phi(\alpha)=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_1^*}+\frac{1}{\rho_2^*}-1.$$

其中，ρ_1，ρ_2分别为e二端的次；ρ_1^*，ρ_2^*分别为与e关联的二面的次。由此，

$$\sum_\alpha \phi(\alpha)=\sum_f \phi(f)=\sum_v \phi(v)=\sum_e \phi(e)=2. \tag{6.5'}$$

命题6.3 对于任一节点次和面次均不小于3的平面图G中的一个角α，若$\phi(\alpha)>0$，则只能如下情形之一出现：$(\rho(v_\alpha),\rho^*(f_\alpha))=(3,3)$，$(3,4)$，$(4,3)$，$(5,3)$，或$(3,5)$。

证明 由$\phi(\alpha)>0$，即$\frac{1}{\rho(v_\alpha)}+\frac{1}{\rho^*(f_\alpha)}>\frac{1}{2}$，从而只能有如上所述五种情形。 ▮

定理6.4 在任一节点次和面次均不小于3的平面图中，总有

$$n^+(\alpha)=|\{\alpha|\phi(\alpha)>0\}|\geqslant 12.$$

证明：由命题6.3，只有 $\phi(\alpha)=\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，和$\frac{1}{30}$三种可能值。然，又由(6.5)，则当取值$\frac{1}{6}$时$n^+(\alpha)$最小，即12。 ▮

下面，研究$\phi(e)>0$的情况。实际上，即讨论如下不定不等式的解：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}>1. \tag{6.6}$$

若(6.6)中的一组解(a_1,a_2,a_3,a_4)使得任何其他的解(b_1,b_2,b_3,b_4)均有

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)\geqslant(b_1,b_2,b_3,b_4).$$

即$a_i\geqslant b_i$，$i=1,2,3,4$。则称(a_1,a_2,a_3,a_4)为(6.6)的一个上解。当然，上解未必唯一。从而，记N为(6.6)的所有上解的集合。称之为上集。

命题6.4　对任一节点次和面次均不小于3的平面图，则(6.6)的任一上解可由(3,3,4,11)，(3,3,5,7)，(3,4,4,5)或(3,3,3,m)，$m\geqslant12$，中某个通过位置的置换而得到。

证明　由(6.6)中，$\rho_1,\rho_2,\rho_1^*,\rho_2^*$的对称性，只需讨论满足$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4$的上解。这时，有(3,3,3,$m$)，对任$m\geqslant3$皆满足(6.6)。和(3,3,4,11)，(3,3,5,7)，(3,4,4,5)。又由(3,3,3,11)⩽(3,3,4,11)，故得欲证。 ▮

定理6.5　在任一节点次和面次均不小于3的平面图中，至少有6条边使得$\phi(e)>0$。

证明　由$\phi(e)$的最大值为(3,3,3,3)所确定，即$\frac{1}{3}$。又由(6.5)′，则这时至少得有6个类型(3,3,3,3)的边。 ▮

对任一面$f\in F$，记$\rho^*=\rho^*(f)$。则$(\rho_1,\cdots,\rho_{\rho^*})$，$\rho_1\leqslant\rho_2\leqslant\cdots\leqslant\rho_{\rho^*}$，$\rho_i$为$f$边界上节点的次，$i=1,\cdots,\rho^*$，称为面$f$的次叙列。

命题6.5　对任一节点次和面次均不小于3的平面图，则使$\phi(f)>0$的面的次叙列由如下上集所确定：

$$\begin{aligned}N=\{&(3,6,m_1),\ (3,7,41),\ (3,8,23),\ (3,9,17),\ (3,10,14),\\&(3,11,13),\ (4,5,19),\ (4,6,11),\ (4,7,9),\ (4,4,m_2),\\&(5,5,9),\ (5,6,7);\ (3,3,3,m_3),\ (3,3,4,11),\\&(3,3,5,7),\ (3,4,4,5);\ (3,3,3,3,5)\}.\end{aligned}$$

其中，$m_1\geqslant42$，$m_2\geqslant10$，$m_3\geqslant12$。

证明　由$\phi(f)\leqslant1-\frac{1}{2}\rho^*(f)+\frac{1}{3}\rho^*(f)=1-\frac{1}{6}\rho^*(f)$，从而，欲$\phi(f)>0$，只可能$\rho^*=3,4$或5。分别讨论，又考虑只取上解，即得如上所示的上集N。 ▮

定理6.6　在任一节点次和面次均不小于3的平面图中，至少有4个面使得$\phi(f)>0$。

证明　由最大的$\phi(f)=1-\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}$，则由(6.5)′可得定理。 ▮

定理6.7　一个平面图，若$\delta=\min\rho(v)\geqslant5$，$\delta^*=\min\rho^*(f)\geqslant3$，则至少有60个角，其顶所相应的节点的次为5，所在面的次为3。

证明　由命题6.3，这时使$\phi(\alpha)>0$的只有$(\rho(v_\alpha),\rho^*(f_\alpha))=(5,3)$。然，这里$\phi(\alpha)=\frac{1}{30}$。由(6.5)′，即得。 ▮

定理6.8 在任一$\delta\geqslant5$，$\delta^*\geqslant3$的平面图中，至少有30条边为二个三角形的公共边．则这些边一端次为5，而另一端次为5，6或7．

证明：由命题6.4，这时使$\phi(e)>0$的只有$(\rho_1,\rho_2,\rho_1^*,\rho_2^*)=(3,3,5,7)$，即$\phi(e)=\frac{1}{15}$．由(6.5)′即得定理． ▮

自然，如法泡制还可得一些定理．上述定理的对偶亦可提笔而就．这些均留给对此有兴趣的读者．

§7 Kempe链与五色定理[7-14]

对于任一平面图$G=(V,E)$，F为其面的集合．为方便，记$S=V$，E或F．所谓G对于S的k着色，或记k-S着色，指对G的如下分解：

$$S=S_1+S_2+\cdots+S_k \tag{7.1}$$

使得对所有i，或称色i，$1\leqslant i\leqslant k$，任s，$s'\in S_i$均有s,s'不相邻．即S_i皆独立集．若G有一个k-S着色，则称G为k-S可着色．记

$$\chi_S(G)=\min\{k\,|\,G\text{为}k\text{-}S\text{可着色}\}, \tag{7.2}$$

称之为G的S色数．通常V着色简称为着色．这时，只需研究简单图．若二个着色只相差一个色置换，则称它们本质相同．对于平面图G和它的对偶G^*，自然，有G为k-V可着色，当且仅当G^*为k-F^*可着色．

对于G的任何一个k-V着色，如(7.1)所示，和$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant k$，则$G[V_i+V_j]$的连通片，若有圈必偶长．称每个这样的连通片为Kempe链．可见，在G的任一Kempe链上交换其二色i,j仍得到G的一个k-V着色．

命题7.1 若$G=G_1+G_2+\cdots+G_\omega$，则$G$为$k$-可着色，当且仅当$G_i$，$i=1,2,\cdots,\omega$，均为$k$-可着色．

证明 由定义直接可得． ▮

命题7.2 若$G=G_1\cup G_2$，$G_1\cap G_2=\{v\}$，则G为k-可着色，当且仅当G_1，G_2均k-可着色．

证明 必要性是直接的．设G_1,G_2均k-可着色．即$V_1=\sum_{i=1}^{k}V_{1,i}$，$V_2=\sum_{i=1}^{k}V_{2,i}$．若$v\in V_{1,s}$，和$v\in V_{2,t}$．则在$G_1$的含$v$的$s,t$色成的Kempe链上交换此二色仍得$G_1$的$k$-着色．然这时在$v$处的色与$G_2$中的同．故可并为$G$的$k$-着色． ▮

先研究平面图的着色．一个平面图G，若圈C为其无限面的边界，则称G为C内平面图．相仿地，可定义C外平面图．容易看出，有1、2、3或4色的平面图．自然要问：是否有5色的平面图？即，是否所有平面图均4-可着色？这就是四色问题．

命题7.3 令G是一个C外(或内)平面图，在C上依次有四个节点v,u,w,x．且有一个4-着色使得分别着色$\alpha,\beta,\gamma,\delta$．如果$v,w$属于同一个$\alpha,\gamma$ Kempe链，则无任何β,δ Kempe链同含u，x．

证明 由Jordan公理直接可得． ▮

一个C内平面图R，若对任一C外平面图都存在一个k-着色使得可由C延拓到全R，则称R为k-可约的．自然，k-可约即$(k+1)$-可约．但反之不然．当$k=4$时k-可约简称为

可约。可见，3-轮图，即只有 4 个节点的轮图是可约的。

命题7.4　4-轮图是可约的。

证明　令C为4-轮图无限面边界。对任C外平面图的4-着色，只需考虑使C上四节点u，v，w，x依次着α，β，γ，δ的情况。假若无α,γ Kempe链同含u，w，则在u所在的α,γ Kempe链上交换二色使C上只用三色。否则，由命题7.3可在v所在的β,δ Kempe 链上交换二色又致C上用三色。从而，是可约的。▮

命题7.5　5 轮图是5-可约的。▮

证明：记C上 5 个节点依次为$v_1v_2v_3v_4v_5$。对于任C外平面图的5-着色，也只需考虑致C上用 5 色的情况。不妨取依次着α，β，γ，δ，η色。若无γ,η Kempe链同含v_3，v_5，则交换v_3所在的γ，η链上二色可得C用四色。否则，由命题 7.3 也可致C用四色。从而，是5-可约的。▮

定理7.1　任何平面图均5-可着色。

证明　只需讨论极大平面图和节点次，面次均不小于 3 的情形。且，对于小图易验证。由命题4.2，和定理6.1的对偶形式可知总有3-轮图，4-轮图，或5-轮图作为子图。从而，由命题7.4-5 和归纳法即得。▮

当然，若能证明5-轮图也是可约的，即可得四色定理。这就是Kempe的错误所在。进一步情况将在§21中讨论。

命题7.6　令$G=G_1\cup G_2$，$E_1\cap E_2=\phi$，$V_1\cap V_2=\{u,v\}$。记$G_i'=G_i+(u,v)$，$i=1$，2。若G_i'，$i=1,2$，k-可着色，则G也k-可着色。

证明　因这时总使u，v异色，可在G_1'上作色的置换使u，v的色与G_2'中的一致。从而，可并成G的k-着色。▮

命题7.7　对任一图$G=(V,E)$，记$\Delta=\max\limits_{v\in V}\rho(v)$，和任一节点$v$，总存在一个$(\Delta+1)$-着色使得$v$的色与所有其他节点的都不同。

证明　若G有一$(\Delta+1)$-着色使得v的色与u的相同。由连通性，存在路$P(u,v)=uu_1\cdots u_nv$。因在$G-(u,u_1)$中u的次至多为$\Delta-1$，可使u_1外所有$\{u\}\cup V_u$中节点的色与v的不同，然后，对$G-(u_1,u_2)$，直到u_n均与v异色。如此方式可改变每个与v同色的节点的色使与v的不同。▮

定理7.2　任何图G，若$G\neq K_{\Delta+1}$，必Δ-可着色。

证明　由命题7.7，只需考虑Δ-正则图，和由命题7.6，可设G为3-连通的。

因$G\neq K_{\Delta+1}$，存在u,v，$(u,v)\bar{\in}E$。由命题7.7，可用$\Delta+1$色着G使得只有u着α。又在V_v中至少有二个节点x，y同色。由G的3-连通性，存在路$P(u,v)$不过x和y。这样，又可将α移到v。然V_v中只用$\Delta-1$色。从而可着v以除α外的Δ色中V_v的节点未用者。即得G的Δ-着色。▮

由此可得如下二个推论。

推论7.1　任何3-正则图G，若$G\neq K_4$，则必为3-可着色。

推论7.2　所有至少 5 个节点的3-正则平面图皆3-可着色。

§8 色函数[15,16]

实际上，图G上的一个着色即一个映象ψ_S：$S\to M$，使得$f(s_1)\neq f(s_2)$，当s_1与s_2不相邻。其中，$S=V,E$或F（若G为平面图），M为一代数模，其上定义加法运算。通常视为有限。记$n(M)$表M中元素个数。而且还规定个次序。自然，$0\in M$。称这样的ψ_S为G对于S的色函数。M称为色模。若存在$s_0\in S$使得$\psi_S(s_0)=0$，则称ψ_S为正规的。若对任二色$\alpha,\beta\in M$，存在$s_1,s_2\in S$相邻且使得$\psi_S(s_1)=\alpha$，$\psi_S(s_2)=\beta$，则称ψ_S是本原的；否则，非本原的。由本原色函数规定图的着色称为本原着色。

一个边函数g：$E\to M$，若将E中的边给以定向使得

$$g(e)=\begin{cases}|g(e)|,\ \text{当}e=\langle u,v\rangle\text{为给定的方向；}\\ -|g(e)|,\ \text{否则，}\end{cases}$$

则称之为有向边函数。事实上，下述边函数均指有向的。对于一个点函数f：$V\to M$，如下所确定的有向边函数

$$g_f(\langle u,v\rangle)=f(v)-f(u)$$

称为f的导出有向边函数。

命题8.1 一个点函数f：$V\to M$，$f=\psi_V$，当且仅当f的导出有向边函数g_f满足：$g_f(e)\neq 0$，$e\in E$。

证明 由导出有向边函数和色函数的定义直接可得。 ▌

一个边函数g，若对任何$v,u\in V$和任二途径$W_1(u,v),W_2(u,v)$均有$g(W_1)=\sum_{e\in W_1}g(e)=\sum_{e\in W_2}g(e)=g(W_2)$，则称$g$为正则的。对于选定的$v_0\in V$，正则边函数$g$所确定的点函数$f_g(v)=\sum_{e\in W(v_0,v)}g(e)$，$W(v_0,v)$为连$v_0,v$的途径，称为$g$的导出点函数。易见，对于不同的$v_0$，$g$的导出点函数只差一个常数。

命题8.2 若点函数$f=f_g$，则边函数$g=g_f$。

证明：设$e=\langle u,v\rangle$。由$f=f_g$，则对选定的v_0，有

$$f_g(v)-f_g(u)=\Big(\sum_{e'\in W(v_0,u)}g(e')+g(e)\Big)-\sum_{e'\in W(v_0,u)}g(e')=g(e),$$

即得欲证。 ▌

命题8.3 一个边函数g是正则的，当且仅当对G上的任何圈C，有$g(C)=0$。

证明 由正则性和g的可加性即得。 ▌

下面，仍回到平面图中来并考虑2-连通。

命题8.4 对于平面图，一个边函数g是正则的，当且仅当对每个有限面的边界$B(f)$，$g(B(f))=0$。

证明 实际上，所有有限面的边界形成圈空间的一组基，和g的可加性。由命题8.3即得。 ▌

由对偶性，还可从G的面函数φ：$F\to M$，即G^*上的点函数f^*：$V^*\to M$，出发导出一个有向边函数。至于G^*上边的定向完全可由G上边的定向所确定。如$B(f_1)\cap B(f_2)=e$，

规定e^*的方向为沿 e 方向走时从左面到右面。自然，e 的方向就是沿e^*方向走时从右到左了。由此，在G^*上也可建立f^*的导出有向边函数g^*及正则性。从而，得到与上述命题对偶的命题。

对于色函数ψ_V，将G中的边$e=(u,v)$按如下规则定向：

$$e=\begin{cases}\langle u,v\rangle, & \text{当}\psi_V(v)>\psi_V(u);\\ \langle v,u\rangle, & \text{否则，即}\psi_V(v)<\psi_V(u).\end{cases}$$

这样得到的有向图称为*点色向图*。对偶地，由ψ_F可得*面色向图*。一个有向图，若其上一圈C上的边皆同向，则称C为*迴路*。若不存在任何迴路，则称为*无迴路图*。而，每条边都在一个迴路上，则称*迴路图*。

命题8.5 对任何平面图，其点色向图为无迴路图。而，面色向图则为迴路图。

证明 前半部分是直接的，后半部分，由对偶性，若有一边e不在任何迴路上，则存在含e的上圈，其上边的方向都与e同。这样就有一个面的叙列$f_1,\cdots,f_l$，f_i与f_{i+1}相邻且$f_{l+1}=f_1$，$i=1,\cdots,l$，使得$\psi_F(f_1)<\cdots<\psi_F(f_l)<\psi_F(f_1)$或相反。不可能。 ▮

对G上边的定向给二有向边函数g_1，g_2使得 $g_2(e)\geqslant g_1(e)>0$，确定一个有向边函数g如下：令 $e=(u,v)$定向为$\langle u,v\rangle$，

$$g(e)=\begin{cases}g_1(e), & \text{当}e=\langle u,v\rangle;\\ -g_2(e), & \text{当}e=\langle v,u\rangle.\end{cases}$$

令C为G上的一个圈，记 $E^+(C)=\{e|e$ 的定向与C的走向同$\}$，$E^-(C)=\{e|e$ 的方向与C反$\}$。若对所有圈C，都有 $g(C)\leqslant 0$，和$g(C^{-1})\leqslant 0$，则可定义点函数f：选固定节点v_0，对任$v\in V$，

$$f(v)=\max_{W(v_0,v)} g(W(v_0,v)).\tag{8.1}$$

引理8.1 由(8.1)确定的f是一个色函数且原图为其点色向图。

证明 首先，对G上边$e=(u,v)$，方向为$\langle u,v\rangle$，

$$f(v)=\max_{W(v_0,v)} g(W(v_0,v))\geqslant g_1(e)+\max_{W(v_0,u)} g(W(v_0,u))=f(u)+g_1(e).$$

从而，$f(v)-f(u)\geqslant g_1(e)>0$。即$f=\psi_V$。

又由对任圈C，$g(C)\leqslant 0$和$g(C^{-1})\leqslant 0$，f的导出有向边函数为

$$g(e)=\begin{cases}f(v)-f(u)=g_1(e), & \text{当}e=\langle u,v\rangle;\\ f(u)-f(v)=-g_2(e), & \text{当}e=\langle v,u\rangle.\end{cases}$$

即原图为f所确定的点色向图。 ▮

定理8.1 图G为k-可着色，当且仅当存在对其边的定向使得对于任一圈C，均有

$$|E^+(C)|\geqslant\frac{1}{k}\varepsilon(C),\quad |E^-(C)|\geqslant\frac{1}{k}\varepsilon(C).\tag{8.2}$$

证明 **必要性**。对G的任一k-着色，有色函数 $\psi_V:V\to M$，不妨取 $M=\{0,1,\cdots,k-1\}$。由此可得G的一个点色向图。且对任一圈，有

$$(k-1)|E^+(C)|\geqslant\sum_{(u,v)\in E^+(C)}\psi_V(v)-\psi_V(u)\geqslant|E^+(C)|;\quad(k-1)|E^-(C)|\geqslant$$

$$\sum_{(u,v)\in E^-(v)}(\psi_V(u)-\psi_V(v))\geqslant|E^-(C)|.$$

又由 $\sum_{(u,v)\in E^+(C)}(\psi_V(v)-\psi_V(u))=\sum_{(u,v)\in E^-(C)}(\psi_V(u)-\psi_V(v))$，则

$$(k-1)|E^+(C)|\geqslant|E^-(C)|;\qquad(k-1)|E^-(C)|\geqslant|E^+(C)|.$$

再由$|E^+(C)|+|E^-(C)|=\varepsilon(C)$，将上不等式二边同加$|E^+(C)|$，或$|E^-(C)|$即得(8.2)。

充分性。只要取$g_1(e)=1$，$g_2(e)=k-1$，则对G的任一圈C和任一规定的走向，有

$$g(C)=\sum_{e\in E^+(C)}g_1(e)-\sum_{e\in E^-(C)}g_2(e)=|E^+(C)|-(k-1)|E^-(C)|=\varepsilon(C)-k|E^-(C)|\leqslant0;$$

$$g(C^{-1})=\sum_{e\in E^+(C)}g_1(e)-\sum_{e\in E^-(C)}g_2(e)=|E^-(C)|-(k-1)|E^+(C)|=\varepsilon(C)-k|E^+(C)|\leqslant0.$$

从而，由引理8.1，按(8.1)，g确定一个色函数$f=\psi_V$。且$0<g_1(e)\leqslant f(v)-f(u)\leqslant g_2(e)=k-1$。故，由此可得$G$的一个$k$-着色。 ▮

如果G是平面图，还可直接得到此定理的对偶形式。

一个有向图G，若任二节点都存在有向路$P(u,v)$和$P(v,u)$，则称为强连通或双向连通。在一双向连通图中，选一固定节点v_0，若从v_0到任一节点的任二有向途径W_1，W_2都有相同的长度$\xi(mod\ m,\ m\geqslant2$，整数)，则称ξ为模m有向距。

命题8.6 $\xi=\psi_F$。即模m有向距是色函数。

证明 对边$e=(u,v)$，$\xi(v)=\xi(u)+1(mod\ m)$，即得。 ▮

定理8.2 一个双向连通图存在模m有向距ξ，当且仅当任一廻路C的长度$l(C)=0\ (mod\ m)$。

证明 **必要性**。设C为过$v\in V$的廻路，固定$v_0\in V$。则

$$\xi(v)=\xi(W(v_0,v))=\xi(W(v_0,v)+C)=\xi(W(v_0,v))+l(C)=\xi(v)+l(C)\ (mod\ m).$$

即，$l(C)=0(mod\ m)$。

充分性。与命题8.3相仿。只要取$\xi=l$即足。 ▮

对于平面图，若任何$f\in F$，$|B(f)|=0(mod\ m)$，$m\geqslant2$，则称m为此图的面模。由定理6.1，对节点次不小于3的平面图，只需考查$m=2,3,4$或5。

定理8.3 令G为2-连通平面图，2-面可着色。若G有面模m，则G为m-点可着色。

证明 由G为2-面可着色和命题8.5可得面色向图双向连通。又对于其上任一廻路C，记$G_{in}=[C_{in}\cap G]$，由边的定向方式可知G_{in}亦2-面可着色。记$F(G_{in})=F_0+F_1$，F_i表着色i的面的集合，$i=0,1$。不妨令无限面$f_\infty\in F_0$。则$\sum_{f\in F_1}|B(f)|=\sum_{f\in F_0-\{f_\infty\}}|B(f)|+|C|$。从而，$l(C)=|C|=0(mod\ m)$。由定理8.2，即得$G$为$m$-可着色。 ▮

关于2-面可着色平面图的点着色。由五色定理，只需研究$m=2,3$或4三情况。然$m=2,4$时为偶图，故2-可着色。

推论8.1 对于极大平面图，其3-点可着色，当且仅其2-面可着色。

证明 **充分性**。由定理8.3，即得。

必要性。对任3-着色，将每个面依其边界上节点着色0,1,2的次序确定一个走向。可见，只有二种走向且相邻面走向不同。这就给出了一个2-面着色。 ▮

推论8.2　一个平面图，2-点可着色，当且仅当所有面边界皆偶长圈。

证明　**必要性**。由定理8.1直接可得。

充分性。由圈长为偶，可将每圈上的边交错定向。也由定理8.1，即得。 ▮

上述结果的对偶形式也可直接写出。

§9　四色问题的形式[17,18]

至今，与四色问题等价的命题有数十种。Saaty 和 Kainen曾收集了35种等价说法。事实上，远不止这些。不拟一一列举。仅就几个在图论的发展中起过重要作用的看在理论上四色问题的研究达到了怎样的深度。本节介绍几种基本的提法。

定理9.1　任何平面图皆4-可着色，当且仅当任何平面图皆4-面可着色。

证明　由对偶性直接可得。 ▮

对平面图上的任4-面着色，记$M=\{0,\alpha,\beta,\gamma\}$。其上的加法如下定义：

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & 0 & \gamma & \beta \\ \beta & \beta & \gamma & 0 & \alpha \\ \gamma & \gamma & \beta & \alpha & 0 \end{array} \tag{9.1}$$

这样的代数模是存在的。因，取$0=(0,0)$，$\alpha=(0,1)$，$\beta=(1,0)$，$\gamma=(1,1)$在 mod2 加法下即为一例。进而，造一个边函数：对$e\in E$，x,y为与之关联二面的着色，令

$$g(e)=x+y \tag{9.2}$$

由此可得E的一个3-分解：

$$E=E_\alpha-E_\beta+E_\gamma \tag{9.3}$$

其中$E_t=\{e\mid g(e)=t\}=\{e\mid e$与$0,t$或$M-\{0,t\}$二色关联$\}$。

命题9.1　对于平面图的任一4-面着色和任$v\in V$，总有$|E_v\cap E_\alpha|=|E_v\cap E_\beta|=|E_v\cap E_\gamma|\ (\text{mod}2)$。

证明：当$\rho(v)=3$，易验证。又对v处任4-面着色，若将一边e，不妨记$g(e)=\gamma$，变为二边e_1,e_2夹一新面f，这时，f着α或β，当e与0，γ色关联；或f着0或γ，当e与α,β色关联。不管那一情形，均有$|E'_v\cap E'_\alpha|=|E_v\cap E_\alpha|+1$，$|E'_v\cap E'_\beta|=|E_v\cap B_\beta|+1$，$|E'_v\cap E'_\gamma|=|E_v\cap E_\gamma|-1$。其中$E'_v=(E_v-e)\cup\{e_1,e_2\}$，$E'_x=(E_x-e)\cup\{e_1,e_2\}$，$x=\alpha,\beta$或$\gamma$。从而，由归纳法可证。 ▮

命题9.2　对于平面图的任一4-面着色，由(9.2)所确定的边函数g正则，当且仅当对任$v\in V$，$|E_v\cap E_\alpha|=|E_v\cap E_\beta|=|E_v\cap E_\gamma|\quad(\text{mod}2)$。

证明　实际上，由于$\alpha,\beta,\gamma\neq0$，有

$$|E_v \cap E_\alpha| = |E_v \cap E_\beta| = |E_v \cap E_\gamma| \pmod 2 \Longleftrightarrow \alpha(|E_v \cap E_\alpha| + |E_v \cap E_\gamma|) +$$
$$\beta(|E_v \cap E_\beta| + |E_v \cap E_\gamma|) = 0 \pmod 2 \Longleftrightarrow \alpha|E_v \cap E_\alpha| + \beta|E_v \cap E_\beta| +$$
$$\gamma|E_v \cap E_\gamma| = \sum_{e \in E_v} g(e) = 0 \pmod 2.$$

从而，由命题8.4的对偶形式，即得欲证。 ▮

定理9.2 一个平面图4-面可着色，当且仅当存在边集的3-分解$E = E_\alpha + E_\beta + E_\gamma$使得对任$v \in V$，有$|E_v \cap E_\alpha| = |E_v \cap E_\beta| = |E_v \cap E_\gamma| \pmod 2$。

证明 **必要性**。由4-面着色得ψ_F。再由(9.2)得边函数g。最后，由命题9.1即得。

充分性。记$g(e) = x$，当且仅当$e \in E_x$，$x = \alpha, \beta$或γ，由命题9.2知g正则。故由命题8.2和8.1的对偶形式，即得。 ▮

进而，由定理8.1的对偶形式还可得

定理9.3 一个平面图4-面可着色，当且仅当存在对于边的定向使得在任一上圈C上，有

$$|E^+(C)| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon(C), \quad |E^-(C)| \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon(C).$$

其中$E^+(C)$，$E^-(C)$分别表示C上对于C的二个不同方向的边的集合。

在平面图G上，若 $H \subseteq G$ 且H的所有节点皆偶次，则称H为G的 Euler 子图。若$f \in F(H)$，且满足条件：

(1) 所有$v \in V \cap f$，都有$|E_v \cap f| = 0 \pmod 2$；

(2) 对$B(f)$的任连通片L，有 $\sum_{v \in V(L)} |E_v \cap f| = 0 \pmod 2$；则称$f$对于$G$全偶。

定理9.4 一个平面图G为4-面可着色，当且仅当存在一个 Euler 子图H使得所有$f \in F(H)$皆对G全偶。

证明 **必要性**。对G的任4-面着色，$M = \{0, \alpha, \beta, \gamma\}$。则有Euler子图

$$H = \sum_{f \in F_\alpha \cup F_0}\!\!\oplus B(f) = \sum_{f \in F_\beta \cup F_\gamma}\!\!\oplus B(f).$$

由对任$f \in F(H)$，将$[f \cap G]$的无限面收缩为一节点所得之图为2-面可着色。从推论8.2的对偶形式即得条件(1)、(2)。即f对G全偶。

充分性。由推论8.2的对偶形式可知H为2-面可着色。又对任 $f \in F(H)$，$[f \cap G]$的所有有限面可用2色着染。从而，G为4-面可着色。 ▮

推论9.1 若平面图G是Hamilton图，则G为4-面可着色。

证明 取H为G的一Hamilton圈。易证其二面对G全偶。由定理9.4，即得。 ▮

从一个平面图的4-面着色，如上所述，可得边的3-分解(9.3)。由此，也可引进边函数

$$g(e) = \begin{cases} 0, & e \in E_\alpha; \\ 1, & e \in E_\beta; \\ -1, & e \in E_\gamma. \end{cases} \tag{9.4}$$

在任一节点v处，由其旋所规定的任相邻边对形成一个角。记$\Lambda = \langle e, e' \rangle$，$e, e' \in E_v$且在$\sigma_v$中$e'$继$e$之后。对于角，还可定义一个角函数

$$\xi(\Lambda)=g(e')-g(e)\ (\mathrm{mod}3),\tag{9.5}$$

称为角的示性函数。可见，其取值与 g 一样为 0,1 或 -1。

命题9.3　对平面图 G 上的任一4-面着色和任 $f\in F$，有 $\Lambda\subset B(f)$，$\xi(\Lambda)\neq 0$，且

$$\sum_{\Lambda\subset B(f)}\xi(\Lambda)=0\ (\mathrm{mod}3).\tag{9.6}$$

证明　设在 $B(f)$ 上依反时针方向为 $e_1,\cdots,e_n$。则

$$\sum_{\Lambda\subset B(f)}\xi(\Lambda)=\sum_{i=1}^{n}(g(e_{i-1})-g(e_i))=\sum_{i=1}^{n}g(e_i)-\sum_{i=1}^{n}g(e_i)=0\ (\mathrm{mod}3).$$ ▮

命题9.4　对平面图 G 上任4-面着色和节点 v，有 $\Lambda\subset E_v$，$\xi(\Lambda)\neq 0$，且

$$\sum_{\Lambda\subset E_v}\xi(\Lambda)=0\ (\mathrm{mod}3).\tag{9.7}$$

证明　与命题9.3相仿地可得。▮

记 $\sigma_v(e_1,\cdots,e_\rho)$，$\rho=\rho(v)$。角 $\Lambda_i=\langle e_i,e_{i+1}\rangle$，$i=1,\cdots,\rho$，$e_{\rho+1}=e_1$。令 $r_B(g(e_l))=\min\{r\,|g(e_{r+l})=g(e_l)\}=\min\left\{r\mid\sum_{i=l}^{r}\xi(\Lambda_i)=0(\mathrm{mod}3)\right\}$。称 $\Lambda_l,\Lambda_{l+1},\cdots,\Lambda_r$ 为 $g(e_l)$ 的一个0-段。且记 $k_{g(e_l)}$ 为在 v 处 $g(e_l)$ 的0-段的数目。因 $g(e_l)=0,1$ 或 -1，只有 k_0，k_1 和 k_{-1}。

命题9.5　对平面图的任一4-面着色，由(9.4)，(9.5)所确定的角示性函数 ξ，总有

$$k_0=k_1=k_{-1}\ (\mathrm{mod}2).\tag{9.8}$$

证明　由定理9.2直接可得。▮

还可将角函数 ξ 延伸到所有边对。对 v 处的旋 $\sigma_v=(e_1,\cdots,e_\rho)$，定义边对函数

$$\xi(e_i,e_j)=\begin{cases}0\,,\ \text{当}\,i=j;\\ \displaystyle\sum_{l=i}^{j-1}\xi(\Lambda_l)\ \ (\mathrm{mod}3),\ \text{当}\ i\neq j.\end{cases}$$

命题9.6　对任一节点 $v\in V$，和 $e_i,e_j\in E_v$，$i\neq j$，有

$$\xi(e_i,e_j)=-\xi(e_j,e_i).\tag{9.9}$$

证明　由 $\xi(e_i,e_{i+1})=-\xi(e_{i+1},e_i)$，即得。▮

若 $e=\langle v_1,v_2\rangle$，记 $e^{-1}=\langle v_2,v_1\rangle$。一个途径 $W=e_0e_1\cdots e_n$，$e_i=(v_i,v_{i+1})$，$i=0,\cdots,n-1$，$W^{-1}=e_n^{-1}\cdots e_1^{-1}e_0^{-1}$。令

$$\xi(W)=\sum_{i=0}^{n-1}\xi(e_i,e_{i+1})\ \ (\mathrm{mod}3).$$

命题9.7　对任一途径 W，和 $e\in E$，有

$$\xi(W^{-1})=-\xi(W),\ \text{和}\ \xi(e,e^{-1})=0.$$

证明：由命题9.6即得。▮

命题9.8 对任一圈C，均有

$$\xi(C)=0 \pmod 3.$$

证明 实际上，对任一圈C，

$$\xi(C)=\sum_{\Lambda\subset C}\xi(\Lambda)=\sum_{f\subset C_{in}}\sum_{\Lambda\subset B(f)}\xi(\Lambda)=0 \pmod 3. \qquad \blacksquare$$

命题9.9 令W_0, W_1为二有相同始边e_0和终边e_n的途径，则

$$\xi(W_0)=\xi(W_1) \pmod 3.$$

证明 由命题9.8和9.7，

$$\xi(W_0)+\xi(W_1^{-1})=\xi(e_0,e_0^{-1})+\xi(e_n,e_n^{-1})+\xi(C)=0,$$

即得欲证。 $\blacksquare$

定理9.5 一个平面图为4-面可着色，当且仅当存在一个角示性函数ξ使得$\xi(\Lambda)=0$，或±1并满足(9.6—8)。

证明 **必要性**。ξ由(9.5)和(9.4)所确定。由命题9.3—5，即得。

充分性。不妨设此图连通。由命题9.9可由ξ造一个边函数

$$g(e)=\begin{cases}0, & \text{当} e=e_0, \ e_0\text{为事先选定的；}\\ \xi(P) \pmod 3, & P\text{为从}e_0\text{到}e\text{的路。}\end{cases}$$

这样，可得边集的3-分解

$$E=E_0+E_1+E_{-1}.$$

且，由命题9.5，对任$v\in V$，有$|E_v\cap E_0|=|E_v\cap E_1|=|E_v\cap E_{-1}| \pmod 2$。故，由定理9.2，即得。 $\blacksquare$

§10 3-正则平面图

事实上，3-正则平面图即极大平面图的对偶。因此，所有极大平面图的结果均有3-正则平面图的对偶形式，既使表达方式上有繁简之分。如§7所述，对于平面图的4-面可着色只需讨论面边界至少含5条边的情况。

定理10.1 所有平面图4-面可着色，当且仅当所有3-正则平面图4-面可着色。

证明 **必要性**。不足道。

充分性。若平面图G中有$v\in V$，$\rho(v)>3$。可作如图10.1所示的变换$\pi_{v\to f'}(G)=G'$。反之，$\pi_{f'\to v}^{-1}(G')=G$。可见，从G的4-面着色即得G的4-面可着色。 $\blacksquare$

为方便，称所有面的边界上至少有5条边的3-正则平面图为范平面图。

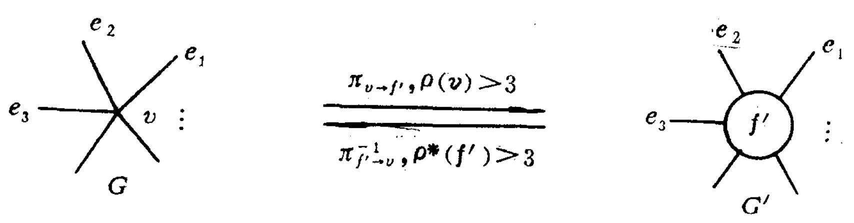


图 10.1

命题10.1　若3-正则平面图G的边集有三分解：

$$E = E_0 + E_1 + E_2$$

使得对任$v \in V$，$|E_v \cap E_i| = 1$，$i = 0, 1, 2$，则必存在节点集的分解：

$$V = \sum_{i=1}^{k} V_i$$

使得$|V_i| = 0 \pmod 2$，且$G[V_i]$，$i = 1, \cdots, k$，全是圈。

证明　**必要性**。因 $G[E_1 + E_2]$ 中所有节点的次均为2，和 $V(G) = V(G[E_1 + E_2])$。故$G[E_1 + E_2] = \sum_{i=1}^{k} C_i$，$C_i$为圈，且$V_i = V(C_i)$，$|V_i| = 0 \pmod 2$，$i = 1, \cdots, k$。

充分性。由$G[V_i]$为圈和$|V_i| = 0 \pmod 2$，则$E(C_i) = E_{1,i} + E_{2,i}$使得$E_{1,i}E_{2,i}$皆$G[V_i]$的完满对集。从而，$E_0 = E - (E_1 + E_2)$，$E_1 = \sum_{i=1}^{k} E_{1,i}$，$E_2 = \sum_{i=1}^{k} E_{2,i}$即所欲求。∎

定理10.2　3-正则平面图4-面可着色，当且仅当存在一个支撑子图H使得$H = \sum_{i=1}^{k} C_i$，C_i，$i = 1, \cdots, k$，皆偶长圈。

证明　由定理9.2和命题10.1即得。∎

若图G存在节点集的2-分解$V = V_1 + V_2$使得$G[V_1]$，$G[V_2]$皆偶图，则称之为G的一个偶对分解。

定理10.3　3-正则平面图4-面可着色，当且仅当极大平面图有偶对分解。

证明　**必要性**。由极大平面图G的对偶G^*为3-正则。从G^*的一4-面着色可得$V = V_\alpha + V_\beta + V_\gamma + V_0$。则$G[V_0 + V_\alpha]$，$G[V_\beta + V_\gamma]$皆偶图。即$V_1 = V_0 + V_\alpha$，$V_2 = V_\beta + V_\gamma$。

充分性。由 3-正则平面图 G 的对偶 G^* 是极大平面图。其偶对分解$V^* = V_1^* + V_2^*$，$G[V_1^*]$，$G[V_2^*]$皆2-可着色。记$V_1^* = V_0^* + V_\alpha^*$，$V_2^* = V_\beta^* + V_\gamma^*$。由此即得$G$的一4面着色。∎

命题10.2　一个3-正则平面图存在角示性函数 $\xi(\Lambda) = 0$，或± 1满足（9.6—8），当且仅当存在一个节点示性函数$\eta(v) = \pm 1$使得对任一有限面$f \in F$，有

$$\sum_{v \in B(f)} \eta(v) = 0 \pmod 3. \tag{10.1}$$

证明　**必要性**。由(9.7)，对任$v \in V$，记与之关联的三个角为$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$，则$\xi(\Lambda_i)$，$i = 1, 2, 3$，非全零，

$$\xi(\Lambda_1) + \xi(\Lambda_2) + \xi(\Lambda_3) = 0 \pmod 3.$$

再由(9.8)，只能$\xi(\Lambda) = \pm 1$。从而，上式只有二个解：$(\xi(\Lambda_1), \xi(\Lambda_2), \xi(\Lambda_3)) = (1, 1, 1)$或$(-1, -1, -1)$。由此，令

$$\eta(v) = \begin{cases} 1, & \text{当}(\xi(\Lambda_1), \xi(\Lambda_2), \xi(\Lambda_3)) = (1, 1, 1); \\ -1, & \text{否则}. \end{cases}$$

由(9.7)，则对有限面F，有

$$\sum_{\Lambda \subset B(f)} \xi(\Lambda) = \sum_{v \subset B(f)} \eta(v) = 0 \pmod 3.$$

充分性。逆推之即得。∎

定理10.4 3-正则平面图4-面可着色，当且仅当存在一个节点示性函数 $\eta(v)=\pm1$ 使得对任有限面 $f\in F$，有

$$\sum_{v\in B(f)}\eta(v)=0\ (\mathrm{mod}3). \tag{10.2}$$

证明 由定理9.5和命题10.2即得. ▮

定理10.5 3-正则平面图4-面可着色，当且仅当对任何有限面 $f\in F$，(10.2) 有全非零解. 即

$$\eta(v)\neq0\ (\mathrm{mod}3),\ 对任 v\in V. \tag{10.3}$$

证明 实为定理10.4的另一说法. ▮

这个定理利于用计算机处理具体图的着色. Heawood对此作了很多研究将在§11中介绍.

一个图 G 的棱图，记 G_ϵ，即 $V_\epsilon=E$，$E_\epsilon=\{(e',e'')\mid e'$ 与 e'' 在 G 中相邻$\}$. 若 G_ϵ 是平面的，则称为 G 的交换图. 记为 G_I. 易知，所有非平面的图皆无交换图. 也非凡平面图均有交换图. 和任何交换图的面集都有2-分解:

$$F_I=F_\gamma+F_\beta \tag{10.4}$$

使得 $E_\epsilon(f'_\gamma)\cap E_\epsilon(f''_\gamma)=\phi$，$f'_\gamma=f''_\gamma$，$f'_\gamma,f''_\gamma\in F_\gamma$，和 $E_\epsilon(f'_\beta)\cap E_\epsilon(f''_\beta)=\phi$，$f'_\beta\neq f''_\beta$，$f'_\beta,f''_\beta\in F_\beta$. 其中，$F_\gamma=\{f_\gamma\mid\exists f\in F\ni E(f)=V_\epsilon(f_\gamma)\}$，$F_\beta=\{f_\beta\mid\exists v\in V\ni E_v=V_\epsilon(f_\beta)\}$. 从而，所有交换图皆2-面可着色. 若 F_γ 或 F_β 中的面皆三角形，则称此交换图具三角色.

命题10.3 一个平面图有交换图，当且仅当所有节点的次不大于4，且所有次为4的节点皆分离节点.

证明 必要性易验证. 充分性可直接造出. ▮

命题10.4 一个简单图是某3-正则图的交换图，当且仅当它是一个极大平面偶图的对偶且具三角色.

证明 **必要性**. 由3-正则可得三角色且所有节点的次均为4. 又由平面性即得.

充分性. 若 F_β 中面皆三角形. $f\in F_\beta$ 相应节点. 二节点相邻，当且仅当相应二面的边界有一个公共节点. 此即某3-正则图的交换图. ▮

定理10.6 一个3-正则平面图4-面可着色，当且仅当其交换图3-点可着色.

证明：由 G_I 的定义，实为定理10.2的另一说法. ▮

定理10.7 3-正则平面图4-面可着色，当且仅当具有三角色的4-正则平面图3-点可着色.

证明 由命题10.4和定理10.6即得. ▮

下面研究3-正则平面图的结构性质.

所谓 H-子图，即如图10.2所示. 记为 $v_1\dot{v}_2v_3$；$v_4\dot{v}_5v_6$. 其 v_2,v_5 上有点示 (v_2,v_5) 为中边.

命题10.5 任何连通3-正则平面图，至少6个节点，则任一节点均在某 H-子图上.

证明 取 $v_0\in V$. 若存在 $e\in E_{v_0}$ 为分离边，则有以 e 为中边的 H-子图含 v_0. 否则，记 $V_{v_0}=\{v_1,v_2,v_3\}$，$e_i=(v_0,v_i)$，$i=1,2,3$，全非分离边，则有路 $P(v_1,v_2)$，和 $P(v_1,v_3)$. 即如图10.3(a)的结构. 若 $P(v_1,v_2)$，$P(v_1,v_3)$ 不全为边，如 $(v_4,v_3)\in E$.

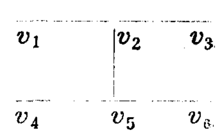


图 10.2

当 $v_2 \neq v_5$，有以 (v_0, v_3) 为中边的 H-子图；当 $v_2 = v_5$，由3-正则，必 $v_6 \neq v_2$，有以 (v_3, v_4) 为中边的 H-子图。若 $P(v_1, v_3)$，$P(v_1, v_2)$ 皆为边，则有如图10.3(b)的结构。这时，(v_3, v_5) 为中边的 H-子图含 v_0。▮

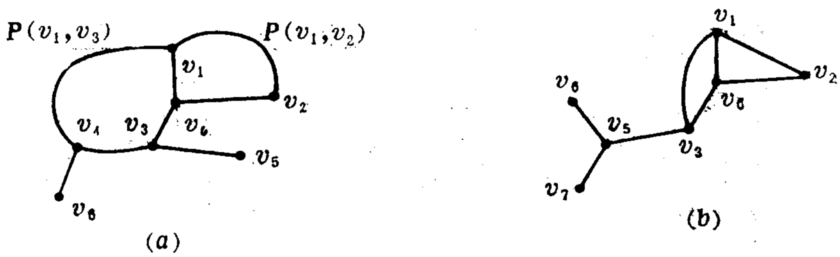


图 10.3

一个 H-子图：$v_1\dot{v}_2v_3$；$v_4\dot{v}_5v_6$，若在 G 中，$(v_i, v_j) \in E$，$i = 1, 3$；$j = 4, 6$，则称之为严 H-子图。

命题10.6　任一3-正则连通平面图，至少 8 个节点，则其中必含有一个严 H-子图。

证明　由命题10.5，可从某 H-子图始。考虑 (v_i, v_j)，$i = 1, 3$；$j = 4, 6$，中有三、二、一条边三种可能情况。分别造出严 H-子图即足。▮

在一个 3-正则平面图中，将 H-子图 $v_1\dot{v}_2v_3$；$v_4\dot{v}_5v_6$ 中的节点 v_2，v_5 去掉并加上边 (v_1, v_4)，(v_3, v_6) 或 (v_1, v_6)，(v_3, v_4)。这样的运算称为 H-约化。其逆称为 H-伸张。可见 H-约化和 H-伸张使3-正则性不变。

命题10.7　任一连通3-正则平面图，$\nu \geq 8$，都有一个严 H-子图使得对它作 H-约化仍得一连通图。

证明：若对一严 H-子图作 H-约化后不再连通，则有如图 10.4 的结构。由 3-正则，$\nu(G_i) \geq 3$，$i = 1, 2, 3, 4$。从而，图中还有以 (v_1, v_2)，(v_2, v_3)，(v_4, v_5)，(v_5, v_6) 为中边的严 H-子图。继续下去，由图的有限性，可得结论。▮

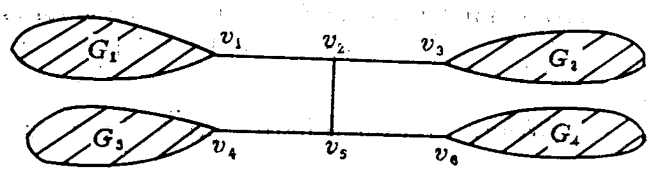


图 10.4

定理10.8　任何具有 $\nu \geq 8$ 个节点的3-正则连通平面图均可由具有 $\nu-2$ 个节点的 3-正则连通平面图经 H-伸张而得。

证明　由命题10.7直接可得。▮

参　考　文　献

[1] Euler, L., Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum guibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, *Novi. Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol.* 4 (1752—3) pp. 140—160.

[2] Legendre, A. M., Elements de gèomètrie, Firmin Didot, Paris, 1794.

[3] Cauchy, A., and Lhuilier, L., Recherches sur les polyèdres, *J. Ecole Folytech.* 9 (Cah.16) (1813), pp. 68—86.

[4] Lhilier, S. (abridged by J. D. Gergonne), Mèmoire sur la polyèdromètrie, *Ann. Math*, 3(1812—1813),pp. 169—189.

[5] Listing, J. B., Der Consus räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satyes von den Polyëdern, *Abh. K. Ges. Wiss Göttingen Math. Cl.* 10(1861—2), pp. 97—182.

[6] Lebesgue, H., Quelgues consèquences simples de la formule d'Euler, *J. de Math.* 9, Sèr. 19 (1940), pp. 27—43.

[7] Whitney, H., and Tutte, W. T., Kempe chains and the four color problem, *Utilitas Math*. Vol. 2 (1972), pp. 241—281.

[8] Heawood, P. J., Map-colour theorems, *Quart. J. Math. Oxford Ser*. Vol. 24 (1890), pp, 332—338.

[9] Brooks, R. L., On coloring the nodes of a network, *Proc. Camb. Philos. Soc*. 37 (1941), pp. 194—197.

[10] Gerencsèr, L., On colouring problems (in Hungarian), *Mat. Lapok* 16(1965), pp. 274—277.

[11] Melnikov, L. S., and Vizing, V.G., New proof of Brooks' theorem, *J. Comb. Theory* 7(1969), pp. 289—290.

[12] Ponstein, J., A new proof of Brooks' chromatic number theorem for graphs, *J. Comb. Theory* 7 (1969), pp. 255—257.

[13] Szekeres, G., and Wilf, H. S., An inequality for the chromatic number of a graph, *J. Comb. Theory* 4 (1968), pp. 1—3.

[14] Lovàz, L., Three short proofs in graph theory, *J. Comb. Theory Ser*. B 19 (1975), pp. 269—271.

[15] Minty, G. J., A theorem on n-coloring the points of a linear graph, *Amer. Math. Monthly* 69 (1962), pp. 623—624.

[16] Ore, O., The Four-Color problem, Academic Press 1967, pp. 90—101.

[17] Aarts, J. M., and de Groot, J., A case of colouration in the four colour problem, *Nieuw Arch. Wis*. 11 (1963), pp. 10—18.

[18] Ore, O., The Four-Color problem, Academic Press 1967, pp. 102—116.

[19] Wernickle, P., Über den kartographischen Vierfarbensats, *Math. Ann*. 58 (1904), pp. 413—426.

[20] Franklin, P., The four color problem, *Amer. J. Math*. 44(1922), pp. 225—236;

[21] Lebesgue, H., Quelques consèquences simples de la formule d'Euler, *J. de Math*. 9, Sèr. 19(1940). pp. 27—43.

[22] Heawood, P. J., On the four-colour map theorem, *Quart. J. Math*. 29(1897). pp.279—285.

[23] Veblen, O., An application of modular equation in Analysis Situs, *Ann. Math*. 14(1913), pp. 163—178.

[24] Franklin, P., Note on the four color theorem, *J. Math. phys*. 16(1938), pp. 172—184;

[25] 刘彦佩，平面图的理论与四色问题(I)一平面性与对偶性，数学研究与评论．Vol. 3(1983), №.3;

Planar Graph Theory and the Four Color Problem (II)

—Five Color Theorem and Formulation of Four color Problem

Liu Yanpei

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

This is the second part of the series of five papers about planar graph theory and the four color problem.

It contains the following five sections: §6 Related to the Euler formula; §7 Kempe chains and the five color theorem; §8 Color functions; §9 Fundamental formulation of the four color problem; §10 Cubic planar graphs;