第4卷 第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.4 No.2
1984年4月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　April 1984

NFDE 的 Lurie 型系统的绝对稳定性*

高国柱　黄振勋　阮　炯
（复旦大学）

1. 引　言

文［2］研究了一般的 RFDE 的 Lurie 型系统的绝对稳定性，推广了［5］、［7］的结果。E. N. Chukwu[1]用 Liapunov 泛函研究了某一类 NFDE 的 Lurie 系统的绝对稳定性，其控制执行机构为一维情形。本文就 m 个非线性执行机构的情形，用 POPOV 频率特性方法讨论 NFDE 的 Lurie 型系统的绝对稳定性，并推广了［2］的某些结果。

我们考虑下列直接控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathscr{D}x_t}{dt} = \mathscr{L}x_t + Rf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = C\mathscr{D}x_t \end{cases} \tag{1}$$

和间接控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathscr{D}x_t}{dt} = \mathscr{L}x_t + Rf(\sigma(t)), \\ \dfrac{d\xi}{dt} = f(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = C\mathscr{D}x_t + D\xi(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x(t)$ 为 n 维列向量，ξ、σ 均为 m 维列向量，D 为 $m\times m$ 实方阵，C 为 $m\times n$ 实矩阵，R 为 $n\times m$ 实矩阵，$f(\sigma)$ 为 m 维列向量连续函数，$f(0)=0$。（E. N. Chukwu[1] 用 V 函数方法得到了 $m=1$ 情形的解的绝对稳定性判据。）

设 $\Delta(\lambda)\overset{\text{def}}{=\!=}\lambda\mathscr{D}(e^{\lambda\cdot}I)-\mathscr{L}(e^{\lambda\cdot}I)$，$G(\lambda)\overset{\text{def}}{=\!=}-C\mathscr{D}(e^{\lambda\cdot}I)\Delta^{-1}(\lambda)R$（若 $\Delta^{-1}(\lambda)$ 存在）。内积定义为 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$，$x\in\mathbf{C}^n$，$y\in\mathbf{C}^n$，其中 $\mathbf{C}^n$ 为 n 维复空间。下面给出两个定义。

定义 1　如果(1)的零解为稳定的，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|\varphi\|<\delta$ 时，$\|x(\sigma,\varphi)\|<\varepsilon$，$t\geqslant0$；又系统(1)的任一解 $x(t)$ 在$[0,+\infty)$上存在，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，则称系统(1)的零解为全局渐近稳定的。对于系统(2)也有类似定义。

设 H 为 m 阶实对角正定阵，即

$$H=\begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & h_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & h_n \end{pmatrix}.$$

定义 2　如果对任何适合条件　$0<z_jf_j(z_j)\leqslant h_jz_j^2$，$(z_j\neq0,\ j=1,2,\cdots,m)$ 的连续向量函数 $f(z)$，系统(1)的零解均为全局渐近稳定，则称系统(1)（或(2)）的零解是 H—绝对稳定的。

---

*1982年6月12日收到。

2. 主要的结果

本文的主要结果如下

定理 1 对于系统(1)，若其线性部份

$$\frac{d\mathscr{D}x_t}{dt}=\mathscr{L}x_t \tag{3}$$

的零解是渐近稳定的，且存在两个 m 阶对角方阵 P、Q，使得

(i) 矩阵 P、Q 的元素均为非负的；

(ii) 对任何实数 ω，矩阵

$$W(\omega)=P+\frac{1}{2}\{(P+i\omega Q)HG(i\omega)+[(P+i\omega Q)HG(i\omega)]^*\} \tag{4}$$

为正定的，其中*表示共轭转置；

(iii) 矩阵 $S=\lim\limits_{\omega\to\infty}W(\omega)=P-\frac{1}{2}[QHCR+(QHCR)^*]$ (5)

也是正定的。

那么，系统(1)的零解为 H 一绝对稳定的。

定理 2 若系统(3)的零解为渐近稳定的，$|D|\neq 0$，且存在 m阶对角方阵 P 和 Q，使

(i) P、Q 的元素均为非负的，PHD 是对称、负定的；

(ii) 对于任何实数 ω，矩阵

$$\widetilde{W}(\omega)=P+\frac{1}{2}\{(P+i\omega Q)H\widetilde{G}(i\omega)+[(P+i\omega Q)H\widetilde{G}(i\omega)]^*\} \tag{6}$$

为正定的，其中 $\widetilde{G}(i\omega)=G(i\omega)-\frac{D}{i\omega}$；

(iii) 矩阵 $\widetilde{S}=\lim\limits_{\omega\to\infty}\widetilde{W}(\omega)=P-\frac{1}{2}\{QH(CR+D)+[QH(CR+D)]^*\}$ 为正定的。

那么系统(2)的零解为 H 一绝对稳定的，且当 $t\geqslant 0$ 时，系统(2)的每一个解 $x=x(t)$，$\xi=\xi(t)$ 满足不等式 $|x(t)|+|\xi(t)|\leqslant M(\|x_0\|+\|\xi_0\|)$，其中 M 为某个正常数，$x_0\in C,\xi_0\in C$。

参 考 文 献

[1] Chukwu, E. N., A Neutral Functional Differential Equation of Lurie Type, *SIAM. J. Math. Anal.*, 11(1), 1980, 108—114.

[2] Ruan Jiong, Absolute Stability of Linear Functional Regulated System With m Nonlinear Regulators, 数学年刊, Vol. 3, No.3(1982), 1—12.

[3] Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1977.

[4] Kamke, E., Das Lebesgue-Stieltjes Integral, 中译本, 高等教育出版社, 1965, 第四章.

[5] 李训经，时滞系统的绝对稳定性，数学学报，13(1963)，第4期，558—573.

[6] Barbălat, I., Revue de Math. pures et Appl., *Acad. RPR*, 4, No.2(1959), 267-270.

[7] Halanay, A., Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags, Acaddemic press, New York, 1966.