第4卷 第2期
1984年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RRSEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

评《Fuzzy 拓扑线性空间的再定义》*

王戈平

（徐州师范学院）

1977年，Katsaras 与 Liu[1] 首先引入了不分明拓扑线性空间的概念，但他们的定义本身是有缺陷的。为了使这方面的工作继续开展下去，吴从炘与方锦暄在 1981 年和 1982 年相继给出了不分明拓扑线性空间的两个新定义（发表在《模糊数学》杂志上）．1982 年底，两人又合作发表了《Fuzzy 拓扑线性空间的再定义》一文，作者认为，他们提出了不分明拓扑线性空间的“再一种新定义”。该定义如下：

定义1[3]设 X 为数域 K 上的线性空间，$(X,\mathscr{T})$ 为 Lowen 意义下的不分明拓扑空间，若映射

$$f:\ X\times X\to X,\ (x,y)\to x+y,$$

$$g:\ K\times X\to X,\ (a,x)\to ax,$$

为不分明连续（其中 K 具有通常拓扑，$X\times X$ 和 $K\times X$ 具有乘积不分明拓扑），则称 $(X,\mathscr{T})$ 为不分明拓扑线性空间。

这里，K 的通常拓扑是指 K 中通常开集的特征函数所组成的不分明拓扑。顺便指出，定义中的“数域 K”应改为“实数域或复数域 K”。

另一方面，Katsaras 本人也早已注意到1977年的定义中存在的问题。例如在[1]中，“拓扑的平移不变性”是作为定义以外的附加条件提出的。1981 年，*Fuzzy Sets and Systems* 杂志发表了 Katsaras 的文[2]。他在这篇文章中，把 1977 年的定义做了两点修改。其一是采用 Lowen 的不分明拓扑的定义，即要求所有常值不分明集是 X 中的开集，这样做的主要目的是使空间的拓扑保持平移不变性；其二是将 K 上的通常拓扑换成通常不分明拓扑，即 K 上所有下半连续不分明集组成的不分明拓扑（又称为诱出不分明拓扑），他认为采用这样的拓扑是“更加适当的”，因为它的结构比K的通常拓扑更为丰富。他的新定义完整地叙述为：

定义2[2]设 K 为实数域或复数域，X 为 K 上的线性空间，$(X,\mathscr{T})$ 为 Lowen 意义下的不分明拓扑空间，若映射

$$f:\ X\times X\to X,\ (x,y)\to x+y,$$

$$g:\ K\times X\to X,\ (a,x)\to ax$$

* 1983 年7月6日收到。

为不分明连续（其中K具有通常不分明拓扑，$X\times X$和$K\times X$具有乘积不分明拓扑），则称$(X,\mathscr{T})$为不分明拓扑线性空间。

值得注意的是，吴、方的文[3]已把Katsaras的[2]作为参考文献引入，因此他们所说的“新定义”当然也意味着与[2]的定义不同。然而事实并非如此，我们可以证明以上两个定义是完全等价的。

为区别K上的两种不分明拓扑，当K上具有通常拓扑时，记为K_1，当K上具有通常不分明拓扑时，记为K_2。显然，K_1中的开集是K_2中的开集，反之不成立。

要证明两个定义的等价性，只要证$K_1\times X$与$K_2\times X$具有相同的不分明拓扑。由前所述，$K_1\times X$中的开集必是$K_2\times X$中的开集。由于$K_2\times X$中所有基本开集$\mu\times\nu$（其中μ是K_2中的开集，ν是X中的开集）组成$K_2\times X$的基，所以只要证$K_2\times X$中的基本开集$\mu\times\nu$是$K_1\times X$中的开集。

由分解定理[4]

$$\mu=\bigvee_{r\in[0,1]} r\chi_{\sigma_r(\mu)},$$

其中$\sigma_r(\mu)=\{x:\mu(x)>r\}$是$\mu$的强$r$截集，$\chi_{\sigma_r(\mu)}$表示$\sigma_r(\mu)$的特征函数。容易证明，对任意$r\in[0,1]$，

$$r\chi_{\sigma_r(\mu)}\times\nu=\chi_{\sigma_r(\mu)}\times(r\wedge\nu).$$

由于所有常值不分明集是X中的开集，所以$r\wedge\nu$是X中的开集，又$\chi_{\sigma_r(\mu)}$是K_1中的开集，所以$\chi_{\sigma_r(\mu)}\times(r\wedge\nu)$，从而$r\chi_{\sigma_r(\mu)}\times\nu$，是$K_1\times X$中的开集。再由显然的等式

$$\mu\times\nu=\Big(\bigvee_{r\in[0,1]} r\chi_{\sigma_r(\mu)}\Big)\times\nu=\bigvee_{r\in[0,1]}(r\chi_{\sigma_r(\mu)}\times\nu),$$

推得$\mu\times\nu$是$K_1\times X$中的开集，证毕。

因此[3]并没有给出任何新定义。最后指出两点：1.吴、方与Katsaras都同意采用Lowen的不分明拓扑定义，显然K_2的拓扑是Lowen意义下的不分明拓扑，而K_1的拓扑却不是，因此在上述两个等价定义中，采用定义2可能更恰当些。2. Katsaras认为K_2的结构比K_1更丰富，所以在K上采用通常不分明拓扑，但不分明拓扑线性空间的定义实质上只与X和$K\times X$的拓扑有关。正如我们已经证明的，K上的两种不同的不分明拓扑所引起的$K_1\times X$与$K_2\times X$的不分明拓扑却完全相同（在分明拓扑学中不可能出现这种情形），这一点也许是Katsaras没有预料到的。因此他所做的第二点修改并不是本质的。

参考文献

[1] Katsaras, A. K., Liu, D. B., Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1977), 135—146.

[2] Katsaras, A. K., Fuzzy topological vector spaces I, *Fuzzy Sets and Systems*, 6(1981), 85—95.

[3] 吴从炘、方锦暄，*Fuzzy* 拓扑线性空间的再定义，科学探索，4(1982)，113—115.

[4] 王戈平，不分明集的一个分解定理及其在不分明拓扑空间中的应用，科学通报，26(1981)，259—262.