第4卷 第2期
1984年4月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.2
April 1984

评《点集拓扑学基础》*

王国俊 赵东升

（陕西师范大学数学系）

最近，我们读了吴东兴先生著的《点集拓扑学基础》（下称《基础》）一书，有几点不成熟的意见，愿在此提出和吴先生商榷。

一、关于新体系问题

众所周知，点集拓扑学从产生到现在，经过了很长的发展过程，数学家们的辛勤劳动已经使它成为一门成熟的数学分支。所以，当我们看到作者在《基础》一书的前言里声称"本书建立新体系，试图使逻辑严格性与直观明显性结合起来，尤其注意从马克思主义认识论的角度进行阐述"，不由得就对本书产生了极大的兴趣，很想从中学得一些新东西。然而看下去的结果却令人大失所望。我们发现作者的"新体系"不过是把若干经科学实践定型的重要概念的名称进行了更换，而这种更换本身在理论上毫无深意，在应用上只会引起混乱。

1 拓扑的定义。这是一个贯穿于全书始终的最重要的概念。在《基础》一书里，拓扑的概念是由下述定义给出的"定义。设X是任一个集合，而$\mathscr{T}=\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是$X$的任一子集族，当且仅当

[$T.1$] $\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}=X$

[$T.2$] 对于任意λ_1，$\lambda_2\in\Lambda$，如果$x\in V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$，则存在$\lambda_3\in\Lambda$，使$x\in V_3\subset V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$。$X$与$\mathscr{T}$一起，组成一拓扑空间，记为$(X,\mathscr{T})$，称为以$X$为基集，以$\mathscr{T}$为拓扑结构的拓扑空间"。因为紧接着在例2，例3和例5中，作者又把满足条件[$T.1$]和[$T.2$]的集族称为拓扑。可见，作者是把上述定义中所说的"拓扑结构"与"拓扑"不加区别的。我们知道，按照通常意义，满足条件[$T.1$]，[$T.2$]的集族叫"拓扑基"而不叫"拓扑"。这样给出拓扑的定义是《基础》一书"新体系"中主要之点。当然，如果这样改换一下名词确实能使处理问题变得简洁，明瞭，更能刻划问题本质，那么这样做也未尝不可。然而，事实却远非如此。

首先，我们认为这样做会引起很大混乱，特别是对于初学者（从本书所涉及的内容看，也只能供初学用）。到目前为止，绝大多数的点集拓扑学的书都把开集的全体叫拓扑。这

---

* 1983年7月13日收到。

是经过多年来不断摸索，反复改进才抽象出来的一个简洁，明瞭的定义。当然，这并不排除可以用其它方法来讲拓扑空间，比如，用闭包公理的方法，邻域系的方法和用收敛类定义拓扑的方法等等。然而，在已经区分得明明白白的“拓扑”与“拓扑基”这两个概念之间，轻率地用后者顶替前者恐怕会把初学者引入五里雾中。如果有一个作者在其代数书中硬把“群”叫做“环”，那么读了这种书的学生和其它人就没有共同语言，无法交流了。

事实上，不用说初学者，从《基础》一书的几处证明中可以看出，连作者自己都被这个“新体系”搞乱了。如《基础》一书的36页，2.2.7定义下面的“(1)．拓扑空间的每一个基本邻域都是开集”.本来按照“新体系”,这是定义中规定了的．而作者却莫名其妙地证明了好几行．这不正说明作者本人被自己的“新体系”搞糊涂了吗？类似的情况还有，如定理2.3.2的证明等。

应该指出，在给出上述“拓扑”的定义之后，在38页作者又给出了一个拓扑结构的定义，即通常用开集方式所引入的拓扑定义．虽然作者强调“它们的本质是一样的”，但由于这两种拓扑结构定义是不等价的，而科学中每个概念的含义应该是唯一确定的，是不能含糊其词的．不同的对象冠以同一个名词也只会引起混乱．

其实，把拓扑基叫拓扑还有更大的弊病．比如，在讲到第二可数公理时就遇到了麻烦．我们问：如果一个“拓扑”具有可数基，那么按作者定义的与之等价的其它“拓扑”是否也有可数基呢？虽然答案是肯定的，但这是需要证明的（比如[1]中就证明了这一事实），至少，比本书中许多加以证明了的事实之论证更不明显，但作者似乎没有意识到《基础》一书的关于第二可数公理的定义6.4.1是隐藏着这个问题，只是轻描淡写的说了一句“显然，可数基的存在是拓扑不变的”。

这里我们指出，用拓扑基代替拓扑，确对某些定理的陈述可以简化几个字。如，“为使X是紧的，当且仅当从X的每个由拓扑基中的开集组成的覆盖中能选出有限子复盖”。但这种简化没有什么实际收益，而且就这个例子而言，对可数紧性就不能做如上变通。所以归根结底还是离不开真正的“拓扑”——全体开集之族，这一概念。事实上，已如上面提及的，《基础》一书不得不在第38页上重新定义拓扑。

2．拓扑的等价性．拓扑的等价性是拓扑中最基本的概念．本来也是容易说明白的，但书中却费了很大的篇幅讨论这个问题，而最后还是没说清楚．在书的43页，作者指出“因此，我们要比较两个拓扑结构，必须比较它们确定极限点的效果，才不致被现象所迷惑”。然而接下去作者并没有按照自己的这种想法去作．在拓扑的等价性定义（第46页）及后来的一些结果中丝毫未涉及到极限点．只是到最后才单方面的证明了“如果两拓扑结构$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$等价，则它们确定极限点的效果完全相同”．而反过来，若两个拓扑确定极限点的效果完全相同，它们是否等价，作者并未提及．而到了第53页，又突然出现“在同一个集合X上的两个拓扑$\mathscr{T}_1$及$\mathscr{T}_2$，当它们确定极限点的效果完全相同时，称它们为拓扑等价”．这样，继第46页的拓扑等价的定义之后，作者在此又给出了一个拓扑等价的定义．如我们所指出的，书中并未证明这两个定义的一致性．那么人们又要问了，到底该把什么叫做拓扑等价呢？这种后不顾前，逻辑上不完整的弊病就使得初学者难以获得一个确切的概念。

3．关于子网的定义．在《基础》一书的第八章里子网是这样定义的“设D是任一有向集，X是拓扑空间，任一映射x_d：$D\to X$称为拓扑空间X的网．设子集$D_1\subset D$仍为有向集，

且与D共尾，即，…，则x_d在D_1上的限制$x_d|D_1$称为x_d的子网”。这种子网的概念是照搬子序列概念而来的，完全没有抓住它的本质(姑且暂称这种子网为自然子网)。

自然子网的概念几乎在网的概念产生的同时就有人提出来了。不久人们就发现它是不成功的。在[2](70页)中已经指出“这是一种标准的构造子网的方法。然而，不幸的是这种子网的概念并不适于所有的目的”。[2]的习题2.E中的例子说明，存在一个网及它的一个聚点，使得没有这个网的自然子网能收敛到这个聚点。这就失去了子网的最重要的性质，因而自然子网在一般框架上基本上是无用的概念，是人们认识道路上的一段曲折的记载。

值得注意的是，网的概念是1922年由E. H. Moore和H. L. Smith提出来的，而到1939年才由E. H. Moore正式提出现在被大家普遍接受的子网的概念([1]的第80—81页)。显然为找到现今这种子网的概念，人们花费了长时间的劳动。《基础》一书把一个早已被人们摒弃了的无用概念重新捡起来当作“新”的东西。目的何在？是作者不知道这些基本事实吗？

4. 关于全书的预备知识

《基础》一书的第一章是读全书的一个预备，理应写得容易使初学者所接受。但我们感到作者在第一章中似乎引入了过多的繁琐概念。这些概念一般都是很少的见，有失偏僻。例如“拟序集”，“拟序格”等等，它们在本书里都很少被使用。而作者却在这颇嫌琐碎的枝节上大费笔墨。这一切只能给初学者理解和接受重要的内容带来麻烦，使他产生莫测高深之感(顺便指出，作者自己在《基础》一书的第一版上把上确界的定义也搞错了，在第二版才作了更正)。

从这一章的体系看，似乎是一种“拼凑式”的体系。如关于Schröder—Bernstein定理的证明似乎译自J. L. Kelly的General topology一书，关于格的论述又好象是编译自Kowalsky的Topological spaces。因为各书的格调不一样，编写目的也各异，这种拼凑式的东西就更难说是“新体系”了。

我们对马克思主义认识论理解得不深，但我们觉得把这样一个乱了套的，连基本概念的表述都毛病颇多的东西冠以“马克思主义认识论的阐述”的作法是不够严肃的。尤其注意到作者写这些话时已是1978年秋天了，这种感觉就更加强烈了。

二、若干错误

本书是入门性质的书籍，所涉及的内容与所选的习题都是一般拓扑中的初等部分，但很遗憾本书仍有若干错误。

1[*]. 良序定理的证明是错的。《基础》一书里在用Zorn引理证明良序定理时有下面一段陈述：“作为$S\times S$的子集族的$\mathscr{L}$，可以根据包含关系定义半序$\leqslant$：对于任意σ，$\rho\in\mathscr{L}$，$\sigma\leqslant\rho$当且仅当$\sigma\subset\rho$。对于半序集$\mathscr{L}$，可以应用Zorn引理。由于$\mathscr{L}$的任一链不过是一个依次包含的$S\times S$的一族子集。这族子集的并便是这族子集的上确界”。下面的例子说明最后的一结论是错的。

*) 这一点是由江西大学数学系七九级徐晓泉同学指出的。

例　令σ_n是整数子集$\{-n,-n+1,\cdots,0\}$的自然大小关系，σ_n是良序关系，且$n\geq m$就有$\sigma_n\supseteq\sigma_m$。然而$\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n=\sigma$是集合$\{\cdots,-n,\cdots,0\}$上的自然大小关系，它不是良序关系。

2. 本书139页超滤子的定义“除去非真滤子，$F(x)$中的极大元称为超滤子”是不合适的。因为由那里$F(x)$的定义，$F(x)$中只能有唯一的非真滤子才可以为极大元。所以按照上述定义，就没有超滤子存在。

又，定理8.2.2的叙述及证明都是错误的。该定理说：“对于每个滤子，存在包含它的超滤子”。但对expX，就没有包含它的超滤子。同时，按作者对“非真滤子”的定义看，这一定理的证明中的Φ只能是单元素集{expX}，其中没有超滤子。因而这一证明也是错误的。

3. 作者在第二版中把习题中的一些错误作了修改（如第一版第六章习题20是错的），这是好的，但仍有错误存在。如第五章习题12，容易说明习题中局部紧和正文中的局部紧性互不蕴涵。

另外正文中还有不少其它错误，如第33页的“在不足道空间X中，任一子集的导集都是X”，“在不足道空间中，任一子集的闭包都是X”以及第43页的例1显然对于子集为空集时都不成立。

以上意见如有不妥，望大家批评指正。

参 考 文 献

[1] Engelking, R., General topology.

[2] Kelly, J. L., General topology.