第4卷 第3期
1984年7月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

Fuzzy 度量化——嵌入理论的一个应用*

刘应明

（四川大学数学研究所）

Fuzzy 伪度量空间已有若干较好的工作[1-3]；但对于重要的 Fuzzy 度量空间连其自身的定义也未讨论清楚。这里的问题或许起因于 Fuzzy 拓扑空间中分离性是颇为复杂的，一种解决的办法是选定标准空间作为 Fuzzy 度量空间，从而得出相应的分离性。鉴于 Fuzzy 单位区间 I(L)[4][5] 是一个具有一系列良好性质的非平凡的 Fuzzy 拓扑空间，我们已经依其为标准空间建立了 Fuzzy 嵌入理论。取它作为 Fuzzy 度量空间似乎是合理的。本文目的是通过嵌入到可数个 $I(L)$ 的积空间的手段来建立著名的 Урысон 度量化定理的 Fuzzy 形式，证明每个具有可数拓扑基的 Fuzzy 完全正则空间的次 T_0 化是 Fuzzy 度量空间，这个方面的一个结果已出现于文献[3]，但由于我们直接了当地诉诸嵌入理论，因而不仅证明本身较为简明，而且从结果上看，由于分离性提得较有背景，也似乎自然些。

本文沿用文献[6]的记号与概念。特别地，L 表示具有逆序对合对应 $'$ 的完全分配格；I(L) 表示取值于 L 的 Fuzzy 单位区间，可数个 $I(L)$ 的积空间记作 $C(L)$。X 表示非空通常集，$(X,\mathscr{T})$ 表示 X 上 L-Fuzzy 拓扑空间。N 表示自然数集。在不发生混淆时，Fuzzy 一词通常省去。

定义 1[3] X 上一个 Fuzzy 伪度量是指满足下列六个条件的映射族 $\{D_r: L^X\to L^X\}$ $(r>0)$：

(1) $D_r(0)=0$，这里 0 为 L^X 中最小元。

(2) $D_r(\lambda)\geqslant\lambda$，$\lambda\in L^X$。

(3) $D_r(\bigcup\limits_\alpha\lambda_\alpha)=\bigcup\limits_\alpha D_r(\lambda_\alpha)$，诸 $\lambda_\alpha\in L^X$。

(4) $D_r\circ D_s\leqslant D_{r+s}$，$s>0$，$r>0$。

(5) $\bigvee\limits_{0<t<s} D_t(\lambda)=D_s(\lambda)$，$s>0$，$\lambda\in L^X$。

(6) $D_r^{-1}=D_r$，这里 D_r^{-1} 为 D_r 的逆，其定义见[1]或[7]。

下文中用 (X, D_r) 表示这个 Fuzzy 伪度量空间。自然映射族 $\{D_r\}$ 也可看作 X 上某 Fuzzy 一致结构的对称基[1]。

命题 1 Fuzzy 伪度量空间 (X, D_r) 的子空间是可伪度量的。

证 设 $Y\subseteq X$，Y 为通常非空集。当然我们也可看 Y 为在 Y 上每点取值 $1\in L$ 的 Fuzzy

*本工作得到中国科学院科学基金会的资助。1983年7月7日收到。

集，下面说明由X上伪度量$\{D_r\}$可自然地诱导出Y上一个伪度量$\{\widetilde{D}_r: L^Y \to L^Y\}$。对每个$\lambda \in L^Y$，设想$\lambda$在$X \backslash Y$上取零值，自然地看$\lambda$为$X$上的Fuzzy集，那么$\widetilde{D}_r(\lambda)$就定义作$D_r(\lambda)$在$Y$上限制，即$\widetilde{D}_r(\lambda) = D_r(\lambda) \cap Y$。易见$\{\widetilde{D}_r\}$ $(r>0)$满足定义1中条件(1)——(5)。至于条件（6）可验证如下：按逆运算定义，对$\lambda \in L^Y$，有

$\widetilde{D}_r^{-1}(\lambda) = \bigwedge\{\mu \in L^Y: \widetilde{D}_r(\mu' \cap Y) \leqslant \lambda' \cap Y\}$，

$D_r^{-1}(\lambda) \cap Y = \bigwedge\{\mu \cap Y: \mu \in L^X,\ D_r(\mu') \leqslant \lambda'\}$。当$D_r(\mu') \leqslant \lambda'$时，自然$\widetilde{D}_r(\mu' \cap Y) \leqslant \lambda' \cap Y$，所以$D_r^{-1}(\lambda) \cap Y \geqslant \widetilde{D}_r^{-1}(\lambda)$。因$D_r^{-1} = D_r$，从而$D_r(\lambda) \cap Y \geqslant \widetilde{D}_r^{-1}(\lambda)$即$\widetilde{D}_r \geqslant \widetilde{D}_r^{-1}$，又由逆运算性质（文献[7]命题3），有$\widetilde{D}_r^{-1} \geqslant (\widetilde{D}_r^{-1})^{-1} = \widetilde{D}_r$。综之，$\widetilde{D}_r = \widetilde{D}_r^{-1}$，条件（6）满足。下面还要说明$Y$上这个伪度量$\{\widetilde{D}_r\}$诱出的Fuzzy拓扑$\mathscr{T}_1$恰是$\{D_r\}$在$X$上诱出拓扑$\mathscr{T}$的相对拓扑$\widetilde{\mathscr{T}}$。由文献[2]的命题4.9，$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}$分别以$\{\widetilde{D}_r(\lambda): r>0,\ \lambda \in L^Y\}$与$\{D_r(\lambda): r>0, \lambda \in L^X\}$为拓扑基。因$\widetilde{D}_r(\lambda) = D_r(\lambda) \cap Y$，有$\mathscr{T}_1 \subseteq \widetilde{\mathscr{T}}$。另一方面，设$\{D_r\}$所对应的伪度量函数是$p$：$L^X \times L^X \to [0, \infty]$（详细点，对$\lambda, \mu \in L^X$，$p(\lambda, \mu) = \bigwedge\{r: \mu \leqslant D_r(\lambda)\}$），那么对任一$r>0$及$\lambda \in L^X$，有$D_r(\lambda) = \bigvee\{\mu \in L^X: p(\lambda, \mu) < r\}$。注意到当$\mu \in L^X$满足$p(\lambda, \mu) < r$时，有$s>0$使$s<r$且$p(\lambda, \mu)<s$，从而不难看出$D_{\frac{r-s}{2}}(\mu) \subseteq D_r(\lambda)$。这样，

$$
\begin{aligned}
Y \cap D_r(\lambda) &= \bigvee\{Y \cap \mu: p(\lambda, \mu) < r,\ \mu \in L^X\} \\
&\subseteq \bigvee\{D_{\frac{r-s}{2}}(Y \cap \mu): p(\lambda, \mu) < s < r\} \cap Y \\
&\subseteq \bigvee\{D_{\frac{r-s}{2}}(\mu): p(\lambda, \mu) < s < r\} \cap Y \\
&\subseteq D_r(\lambda) \cap Y.
\end{aligned}
$$

所以 $Y \cap D_r(\lambda) = \bigvee\{D_{\frac{r-s}{2}}(Y \cap \mu)\} \cap Y = \bigvee\{\widetilde{D}_{\frac{r-s}{2}}(Y \cap \mu)\}$，亦即$\widetilde{\mathscr{T}} \subseteq \mathscr{T}_1$，综之即得所求证。

命题2 可数个Fuzzy伪度量空间的积空间是伪度量的。

因为伪度量空间从一致结构看是以具有可数对称基为特征的，应用[6]的引理4与[1]的命题8，不难证明命题2，细节可请参看[3]的定理4.4的证明。

下面讨论Fuzzy拓扑空间的次T_0化问题。

设$(X, \mathscr{T})$是Fuzzy拓扑空间，考虑X中正常点之间一个关系～：设$x, y \in X, x \neq y$，我们称$x \sim y$当且仅当对任一非零$\lambda \in L$，有$x_\lambda \in \bar{y}_\lambda$及$y_\lambda \in \bar{x}_\lambda$。易见～是一等价关系，从而给出$X$的一个划分；所得商空间记作$(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{T}})$，相应的商映射记作$\pi: X \to \widetilde{X}$。

引理1 设$x, y \in X$且$x \sim y$，那么对任意非零$\lambda \in L$，有$\bar{x}_\lambda(y) = \bar{x}_\lambda(x)$。

证 设$\bar{x}_\lambda(y) = \rho$，$\bar{x}_\lambda(x) = \sigma$。若$\rho \neq \sigma$。先设$\rho \nleqslant \sigma$，自然$\rho \neq 0$。因闭集$\bar{x}_\lambda$包含Fuzzy点$y_\rho$，从而$\bar{y}_\rho \subseteq \bar{x}_\lambda$，即$\bar{y}_\rho(x) \leqslant \bar{x}_\lambda(x) = \sigma$。因$\rho \nleqslant \sigma$，$x_\rho \notin \bar{y}_\rho$。这矛盾于$x \sim y$。其次设$\sigma \nleqslant \rho$。自然$\sigma \neq 0$。因$x_\sigma \in \bar{x}_\lambda$，故$\bar{x}_\sigma \subseteq \bar{x}_\lambda$。于是$\bar{x}_\sigma(y) \leqslant \bar{x}_\lambda(y) = \rho$。这样$y_\sigma \notin \bar{x}_\sigma$，矛盾于$x \sim y$。这些矛盾就反证了本题。

引理2 设F为$(X, \mathscr{T})$中Fuzzy闭集，那么在任一由关系～给出划分成份D(D为X子集)上，F取常值。

证　任取x，$y\in D$。记$F(x)=\rho$，$F(y)=\sigma$。因$x_\rho\in F$，从而$\bar{x}_\rho\subseteq F$。于是$\rho=x_\rho(x)\leqslant\bar{x}_\rho(x)\leqslant F(x)=\rho$，即$\bar{x}_\rho(x)=\rho$。因$x\sim y$，由引理1，$\rho=\bar{x}_\rho(y)\leqslant F(y)$，即$\rho\leqslant\sigma$。类似地可证$\sigma\leqslant\rho$，所以$\rho=\sigma$。

引理3　商映射π：$(X,\ \mathscr{T})\to(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})$是闭映射与开映射且对$\mathscr{T}$中任一闭集$F$，有$\pi^{-1}(\pi(F))=F$，从而拓扑$\tilde{\mathscr{T}}$中闭集族恰是$\{\pi(F):F'\in\mathscr{T}\}$。特别地，$\mathscr{T}$有可数拓扑基当且仅当$\tilde{\mathscr{T}}$有可数拓扑基。

证　由引理2，对$\mathscr{T}$中闭集F，易见$\pi^{-1}\pi(F)=F$。引理其余部分由此易得。

引理4　$(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})$是次$T_0$空间，以后称它为$(X,\ \mathscr{T})$的次$T_0$化。

证　取$\tilde{X}$的不同的通常点$\pi(x)$与$\pi(y)$。因$\pi(x)\neq\pi(y)$，存在$\lambda\in L-\{0\}$使$x_\lambda\notin\bar{y}_\lambda$（若是$y_\lambda\notin\bar{x}_\lambda$，讨论类似进行）。记$\bar{y}_\lambda=F$，有$\lambda\nleqslant F(x)$。因$\pi^{-1}\pi(F)=F$，有$F(x)=\pi^{-1}\pi(F)(x)=\pi(F)(\pi(x))$。于是$\pi(x)_\lambda\notin\pi(F)$，但因$\pi$是闭映射，有$\pi(F)=\pi(\bar{y}_\lambda)\supseteq\overline{\pi(y_\lambda)}=\overline{\pi(y)_\lambda}$，于是$\pi(x)_\lambda\notin\overline{\pi(y)_\lambda}$，即$(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})$是次$T_0$空间。

引理5　设f：$(X,\ \mathscr{T})\to(Y,\ \mathscr{U})$为Fuzzy连续映射，$(Y,\ \mathscr{U})$是次$T_0$空间，$(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})$为$(X,\ \mathscr{T})$的次$T_0$化，那么存在Fuzzy连续映射$\tilde{f}$：$(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})\to(Y,\ \mathscr{U})$，使$\tilde{f}\pi=f$。进而，这个性质是空间次$T_0$化的特征性质，也就是说，设$(Z,\ \mathscr{V})$为次$T_0$空间，若存在满连续映射$\pi(X,\ \mathscr{T})\to(Z,\mathscr{V})$使对任一次$T_0$空间$(Y,\mathscr{U})$及连续映射$f$：$(X,\ \mathscr{T})\to(Y,\ \mathscr{U})$有连续映射$\tilde{f}$：$(Z,\ \mathscr{V})\to(Y,\ \mathscr{U})$满足$\tilde{f}\pi_1=f$，那么$(Z,\ \mathscr{V})$与$(X,\ \mathscr{T})$的次$T_0$化同胚。

证　先证第一部分。对X中通常点x，y，若$x\sim y$，由于$(Y,\ \mathscr{U})$是次T_0空间，反证易知$f(x)=f(y)$。因而f可诱导出一个函数$\tilde{f}$：$\tilde{X}\to Y$。使$\tilde{f}\pi=f$，由于π为商映射，由f之Fuzzy连续性易得$\tilde{f}$的Fuzzy连续性。今证第二部分，考察下面交换图。

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathscr{T}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_1"] & (\tilde{X},\tilde{\mathscr{T}}) \arrow[dl, dashed, shift left, "\tilde{\pi}_1"] \\
(Z,\mathscr{V}) \arrow[ur, dashed, shift left, "\tilde{\pi}"] &
\end{tikzcd}$$

这里$\tilde{\pi}_1$与$\tilde{\pi}$分别是由π_1与π诱导的。对任一Z中通常点z，因π_1为满的，有$x\in X$使$z=\pi_1(x)$。于是$\tilde{\pi}_1\tilde{\pi}(z)=\tilde{\pi}_1\tilde{\pi}\pi_1(x)=\tilde{\pi}_1\pi(x)=\pi_1(x)=z$。故$\tilde{\pi}_1\tilde{\pi}$是$Z$上恒等映射。类似地，$\tilde{\pi}\tilde{\pi}_1$是$\tilde{X}$上恒等映射。这说明$\tilde{\pi}$是$(Z,\ \mathscr{V})\to(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})$的同胚。

命题3　设$(X,\ \mathscr{T})$为有可数拓扑基的完全正则空间，那么它的次T_0化$(\tilde{X},\ \tilde{\mathscr{T}})$仍是有可数拓扑基的完全正则空间。

证　设$G_n(n\in N)$为$(X,\ \mathscr{T})$的可数拓扑基，由引理3，$\pi(G_n)$ $(n\in N)$就是$(\tilde{X},\tilde{\mathscr{T}})$

的可数拓扑基. 任取$\widetilde{\mathscr{T}}$中一开集$\widetilde{U}$, 由引理4, 有$\mathscr{T}$中开集U使$\pi(U)=\widetilde{U}$. 由于$(X,\mathscr{T})$是Fuzzy完全正则空间, 由[6]命题3, 有$\mathscr{T}$中开集族$\{W_a\}$使$U=\cup\{W_a\}$及连续函数f_a: $(X,\mathscr{T})\to I(L)$满足$W_a\subseteq f_a^{-1}(L_1')\subseteq f_a^{-1}(R_0)\subseteq U$, 这里$L_1$与$R_0$是$I(L)$中标准拓扑基中开集. 现在令$\pi(W_a)=\widetilde{W}_a$, 那么$\{\widetilde{W}_a\}$为$\widetilde{U}$的一个分解, 又因$I(L)$是次$T_0$空间[6], 由引理5, 对应$f_a$可诱出连续映射$\tilde{f}_a$: $(\widetilde{X},\widetilde{\mathscr{T}})\to I(L)$使$\tilde{f}_a\pi=f$, 亦即$f_a^{-1}=\pi^{-1}\tilde{f}_a^{-1}$, $\pi f_a^{-1}=\tilde{f}_a^{-1}$, 于是有

$$\pi(W_a)\subseteq\tilde{f}_a^{-1}(L_1')\subseteq\tilde{f}_a^{-1}(R_0)\subseteq\pi(U)=\widetilde{U}.$$

这就证明了$(\widetilde{X},\widetilde{\mathscr{T}})$是Fuzzy完全正则空间.

下面讨论Fuzzy度量化问题. 先证

引理6 设f: $(X,\mathscr{T})\to I(L)$为Fuzzy连续映射, $A\in L^X$, $U\in\mathscr{T}$且$A\subseteq f^{-1}(R_0)\subseteq U$ (R_0是$I(L)$的标准拓扑基中开集). 又设Fuzzy点x_ρ与A相重, 那么$f(x_\rho)\notin\overline{f(U')}$.

证 因x_ρ重于A, 即$\rho\not\leqslant A'(x)$. 今要证$\rho\not\leqslant\overline{f(U')}f(x)$. 由$f^{-1}(R_0)'=f^{-1}(R_0')\supseteq U'$, 有$R_0'\supseteq ff^{-1}(R_0')\supseteq f(U')$, 从而$R_0'\supseteq\overline{f(U')}$. 此外还有$A'\supseteq f^{-1}(R_0')\supseteq f^{-1}(\overline{f(U')})$, 故$f^{-1}(\overline{f(U')})(x)\leqslant A'(x)$, 即得所求证.

定义2 Fuzzy拓扑空间称作Fuzzy度量空间当且仅当它是Fuzzy伪度量空间且为次T_0的.

定理1 设$(X,\mathscr{T})$具有可数拓扑基, 那么它为Fuzzy度量空间当且仅当它是Fuzzy完全正则的次T_0空间.

证 必要性由定义2, [1]的定理9与[6]的定理2即得. 今证充分性. 设$(X,\mathscr{T})$的可数拓扑基为$\{G_n\}$ $(n\in N)$. 偶对(G_{n_2},G_{n_1})称作可允许的, 若存在Fuzzy连续函数f: $(X,\mathscr{T})\to I(L)$使$G_{n_1}\subseteq f^{-1}(L_1')\subseteq f^{-1}(R_0)\subseteq G_{n_2}$. 这种可允许偶对至多为可数个 (其存在性下面即将看出), 标记作P_1, $P_2,\cdots P_n\cdots$并且将P_n相应的某个Fuzzy连续函数记作f_n, 我们说连续映射族$\{f_n\}$是区分点与闭集的, 即对$(X,\mathscr{T})$中任一Fuzzy点e及闭集F, 当$e\notin F$时, 有f_n使$f_n(e)\notin\overline{f(F)}$. 事实上, 记$F'=G$. 因$e\notin G'$即G为$e$的开重域, 而$G$可表作若干拓扑基元的并, 更可设某$G_{n_2}\subseteq G$是$e$的开重域. 今由完全正则性的性质([6]命题4), 有基元G_{n_1}及连续映射f: $(X,\mathscr{T})\to I(L)$, 使e重于G_{n_1}且$G_{n_1}\subseteq f^{-1}(L_1')\subseteq f^{-1}(R_0)\subseteq G_{n_2}$. 亦即$(G_{n_2},G_{n_1})$是可允许偶对, 不妨设它为$P_n$及$f=f_n$. 由引理6, 有$f(e)\notin\overline{f(G_{n_2}')}$. 但$G_{n_2}\subseteq G$, $G_{n_2}'\supseteq G'=F$, 故$f(e)\notin\overline{f(F)}$, 这证明了$\{f_n\}$是区别闭集与点的, 又因$(X,\mathscr{T})$是次$T_0$的, $\{f_n\}$还是区别点的([6]的引理6). 现在应用嵌入引理([6]的定理7), 知$(X,\mathscr{T})$能嵌入至可数个$I(L)$的拓扑积即$C(L)$中去, 由命题2与命题1, 即知$(X,\mathscr{T})$是伪度量空间. 又因$(X,\mathscr{T})$本身就是次T_0的, 充份性证明完毕.

由定理1与命题3即得下面的

定理2 设$(X,\mathscr{T})$这具有可数基的Fuzzy完全正则空间, 那么它的次T_0化是Fuzzy度量空间.

参 考 文 献

[1] Hutton, B., Uniformities on fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1977), 559-571.

[2] Erceg, M. A., Metric spaces in fuzzy set theory, *ibid.*, 69(1979), 205-230.

[3] 梁基华，关于不分明度量空间的几个问题，数学年刊(将发表)。

[4] Hutton, B., Normality in fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 50(1975), 74-79.

[5] 刘应明，不分明单位区间紧性一个问题，科学通报，数理化专辑，1980，33—35。

[6] 刘应明, Pointwise Characterization of complete regurality and imbedding theorem in fuzzy topological spaces, *Scientia Sinica* (Series A), 26(1983), 138-147.

[7] 刘应明, Inverse operation on union-preserving mappings in lattices and its application to fuzzy uniform spacss, Proc. 12th Int, Symp. Multiple-Valued Logic, IEEE, Computer Society, 1982, 280-288.

Fuzzy Metrization—an Application of Imbedding Theory

Liu Yingming (刘应明)

(Institute of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

A fuzzy Pseudo-metric space is called fuzzy metric space iff it is sub-T_0 space. Suppose that $(X, \mathscr{T})$ is a fuzzy topological space. Consider a relation $\sim$ between ordinary points of X: $x \sim y$ iff for each $\lambda \neq 0$, $x_\lambda \in \bar{y}_\lambda$ and $y_\lambda \in \bar{x}_\lambda$. The relation $\sim$ is an equivalent relation. The corresponding fuzzy quotien space is a sub-T_0 space and is called the associated sub-T_0 space of $(X, \mathscr{T})$. In this paper, we establish the following theorem via fzzzy imbedding theory[6]:

Theorem Suppose that $(X, \mathscr{T})$ is a fuzzy topological space with countable topological base. Then (1) $(X, \mathscr{T})$ is fuzzy metrizable iff it is a fuzzy completely regular and sub-T_0 space. (2) If $(X, \mathscr{T})$ is a fuzzy completely regular space, then its associated sub-T_0 space is fuzzy metrizable.