狄里克莱级数在半平面内的增长性*

余久曼

（江汉大学）

文[1]、[2]中研究过狄里克莱级数

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n e^{-\lambda_n s} \quad (s=\sigma+it) \tag{1}$$

在半平面内的增长性，在条件

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n\uparrow+\infty,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(\log|b_n|/\lambda_n)=0 \tag{2}$$

及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(n/\lambda_n)<+\infty \tag{3}$$

下得到文[1]中定理2.1—2.4以及其他结论．现仿照文[3]中的方法，把条件（3）作了推广，即在条件

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n/\log\lambda_n)<+\infty \tag{4}$$

及（2）下，得到了相应的结果．

定理 设对级数（1），条件（2）及（4）成立，则

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}\frac{\log^+\log^+M(\sigma)}{-\log\sigma}=\rho\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^+\log^+|b_n|}{\log\lambda_n}=\frac{\rho}{\rho+1},$$

其中 $M(\sigma)=\sup\limits_{-\infty<t<+\infty}|f(\sigma+it)|\quad(\sigma>0)$；当 $\rho=+\infty$ 时，$\dfrac{\rho}{\rho+1}$ 换成1．

证 考虑 $0<\rho<+\infty$ 的情形．

充分性 由条件，任给 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，$|b_n|<\exp(\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}})$．于是

$$M(\sigma)\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\exp(\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}}-\lambda_n\sigma)\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\{\exp[(1+C_1)\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}}-\lambda_n\sigma]\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-C_1\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}}),$$

其中C_1、C 是正的常数．

由（4）有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\log n/\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}})=0$，当 n 充分大时，$n^2<\exp(C_1\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}})$，因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\exp(-C_1\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho+\varepsilon+1}})$ 收敛．由此并结合文[1]中引理．2，有：

$$M(\sigma)<C'\exp\left[\left(\frac{\rho+\varepsilon}{\sigma}\right)^{\rho+\varepsilon}\left(\frac{1+c_1}{\rho+\varepsilon+1}\right)^{\rho+\varepsilon+1}\right],\quad C'=C'(C_1,\varepsilon).$$

于是

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0^+}}(\log^+\log^+M(\sigma)/-\log\sigma)\leqslant\rho.$$

以下的证明同文[1]定理2.1证明类似．

在条件（2）及（4）下，也可得到与文[1]中定理2.2、2.3及2.4相应的结论，但其证明方法应作相应的改变．

参 考 文 献

[1] 余家荣，数学学报，21(1978)，97—118.

[2] ——，中国科学，1983，A辑，12—20.

[3] 余久曼，数学论评与研究，3(1983)，37—40.

*1983年8月6日收到．