第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

关于方程 $\ddot{\varphi}+(a-b\sin\varphi)\dot{\varphi}+c\cos\varphi=d$ $(a>0,b>0,c>0,d>0)$ 的周期解*

史希福

（东北师范大学）

研究方程

$$\ddot{\varphi}+(a-b\sin\varphi)\dot{\varphi}+c\cos\varphi=d, \tag{1}$$

其中$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$为常数，或方程

$$\ddot{\varphi}+\alpha(\beta-\sin\varphi)\dot{\varphi}+\cos\varphi=\gamma \tag{1$'$}$$

其中 $\alpha=\frac{b}{\sqrt{c}}$，$\beta=\frac{a}{b}$，$\gamma=\frac{d}{c}$.

令$\dot{\varphi}=z$，可得与(1′)等价的方程组

$$\frac{d\varphi}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)z+\gamma-\cos\varphi. \tag{2}$$

(2) 的轨线方程为

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{-\alpha(\beta-\sin\varphi)z+\gamma-\cos\varphi}{z}. \tag{3}$$

文[1]，[2]研究了方程

$$\ddot{\theta}+\alpha\dot{\theta}+\sin\theta-\beta=0, \tag{*}$$

其中$\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$. 在一定条件下，关于同步马达以及并联发动机运行问题，均可归结为这类方程.

文[3]研究了方程

$$\ddot{\varphi}+(\cos\varphi)\dot{\varphi}+a\sin\varphi-R=0, \tag{*,*}$$

其中$R\geqslant0$，$a\geqslant0$，在锁相技术中，可以找到这类方程的应用. 本文所研究的方程 (1)′，显见，较方程（*）及（*，*）更为一般.

下面主要研究系统（1）′(或(2)）的周期解问题. 由于(2)的右端是关于φ的以2π为周期的周期函数，因而，需将它映射到相圆柱面上进行研究，所以，除了研究“普通的”，位于柱面上包围平衡状态的但不围绕圆柱的极限环(这种曲线和相平面上的闭轨线完全类似，我们称它为第一类周期解）外，还要研究围绕圆柱本身但不围绕平衡状态的极限环（称为第二类周期解).为证明第二类周期解存在，有如下引理.

*1981年11月8日收到.

引理1 设$f_1(\varphi)$，$f_2(\varphi)$是系统（3）的两个特解，且对某φ_0满足条件：

$$f_1(\varphi_0+2\pi)\geqslant f_1(\varphi_0),\ f_2(\varphi_0+2\pi)\leqslant f_2(\varphi_0),$$

同时，在该二解曲线之间没有奇点，则在该二解之间存在第二类周期解。

引理1的结论，易于从解对初始值连续相依定理推出。

为说话方便起见，我们称满足条件$f_1(\varphi_0+2\pi)\geqslant f_1(\varphi_0)$的解$f_1(\varphi)$为升型解；称满足条件$f_2(\varphi_0+2\pi)\leqslant f_2(\varphi_0)$的解$f_2(\varphi)$为降型解。

对于系统（3）有下述引理。

引理2 如果z_0充分大，则系统（3）满足条件$z(\varphi_0)=z_0$的解$z=z(\varphi)$为降型解。

证明 引入变换

$$z=\frac{1}{r} \tag{4}$$

变换（4）将方程（3）变为

$$\frac{dr}{d\varphi}=\alpha(\beta-\sin\varphi)r^2-(\gamma-\cos\varphi)r^3. \tag{5}$$

易见，$r=0$是（5）定义在$-\infty<\varphi<+\infty$上的解。

研究后继函数（过点$(0,r_0)$，$r_0>0$，（5）的幂级数形式的解）：

$$r(\varphi)=r_0\psi_1(\varphi)+r_0^2\psi_2(\varphi)+r_0^3\psi_3(\varphi)+\cdots. \tag{6}$$

由假设知，$r(0)=r_0$，从而，$\psi_1(0)=1$，$\psi_2(0)=\psi_3(0)=\cdots=0$。

将（6）代入（5）得

$$r_0\frac{d\psi_1}{d\varphi}+r_0^2\frac{d\psi_2}{d\varphi}+\cdots=\alpha(\beta-\sin\varphi)(r_0\psi_1+r_0^2\psi_2+\cdots)^2+(\cos\varphi-\gamma)(r_0\psi_1+r_0^2\psi_2+\cdots)^3$$

$$=\alpha(\beta-\sin\varphi)\psi_1^2r_0^2+[\alpha(\beta-\sin\varphi)2\psi_1\psi_2+(\cos\varphi-\gamma)\psi_1^3]r_0^3+\cdots \tag{7}$$

比较（7）式两端r_0的同次幂系数，得

$$\frac{d\psi_1}{d\varphi}=0,\quad \psi_1(\varphi)=\text{const}.$$

由假设$r_0=r(0)$知，$\psi_1(0)=1$，因而，$\psi_1(\varphi)\equiv1$，所以，$\psi_1(0)=\psi_1(2\pi)=1$，其次

$$\frac{d\psi_2}{d\varphi}=\alpha(\beta-\sin\varphi)$$

$$\psi_2(\varphi)=\int_0^\varphi\alpha(\beta-\sin\varphi)d\varphi=\alpha(\beta\varphi+\cos\varphi)-\alpha,$$

$$\varphi_2(2\pi)=2\alpha\beta\pi,$$

$$\cdots\cdots$$

因而，由上述讨论可得

$$r(2\pi)-r_0=r_0^2\psi_2(2\pi)+\cdots=2\pi\alpha\beta r_0^2+\cdots$$

故当$r_0>0$充分小时，即$z_0=\dfrac{1}{r_0}$充分大时，$r(2\pi)-r_0$的符号由上式右端r_0^2的系数决定，换句话说，当$0<r_0\ll1$时，$r(2\pi)-r(0)>0$，从而，$z_0>0$充分大时，$z(2\pi)<z(0)=z_0$。故系统（3）满足条件$z(0)=z_0$的解$z=z(\varphi)$，当z_0充分大时，为降型解。证毕。

下面分三种情形研究系统（2）的周期解问题。

Ⅰ　$\gamma>1$，$\beta\geqslant1$

因为系统（2）是圆柱面$z\times\varphi$上的微分方程，因而，只须在带域

$$H:\{0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad -\infty<z<+\infty\}$$

上研究即可。

由于$\gamma>1$，$\beta\geqslant1$，系统（2）此时无奇点。下面来研究（2）在H上所定义的方向场的性质。

水平等倾线方程为

$$z=\frac{\gamma-\cos\varphi}{\alpha(\beta-\sin\varphi)}.\tag{8}$$

由（2）易见，当$\beta\geqslant1$时，有

（1）　在曲线(8)之上方，$\frac{dz}{dt}<0,\frac{d\varphi}{dt}>0$；

（2）　在$z=0$与曲线（8）所围成的区域上，$\frac{dz}{dt}>0,\frac{d\varphi}{dt}>0$；

（3）　在$z=0$下方区域上，$\frac{dz}{dt}>0,\frac{d\varphi}{dt}<0$。

因而，对应于$\gamma>1$，$\beta>1$及$\gamma>1$，$\beta=1$两种情况，（2）所定义的方向场如图1，图2所示。

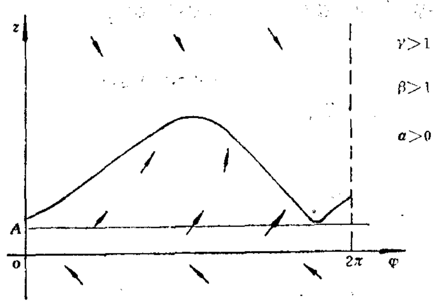

图1

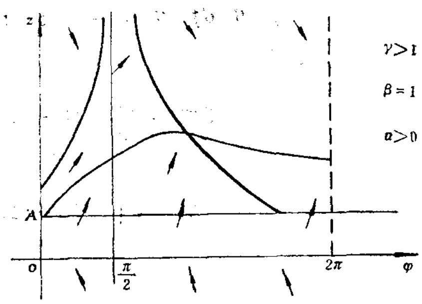

图2

定理1　如果$\gamma>1$，$\beta\geqslant1$，则

（1）系统（2）没有第一类周期解；

（2）系统（2）存在第二类周期解；

（3）系统（2）的第二类周期解位于直线$z=\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)}$的上方，如果$\beta>1$，它还位于直线$z=\frac{\gamma+1}{\alpha(\beta-1)}$的下方。

证明　首先，由于当$\gamma>1$，$\beta\geqslant1$时，系统（2）无奇点，故无第一类周期解。

其次，为证明结论（2），根据引理1，只须证明系统(3)存在升型解即可。为此，我们来研究系统（3）过点$A\left(0,\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)}\right)$的解$f(\varphi)$（图2）。易见，对于直线$z=\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)}$上各点，皆有$\frac{dz}{dt}>0,\frac{d\varphi}{dt}>0$，因而，当$t$增加时，$z=f(\varphi)$，$\varphi$均增大，但由于

$$\left|\frac{dz}{d\varphi}\right|\leqslant\alpha(\beta+1)+\frac{\gamma+1}{|z|},$$

故$z=f(\varphi)$无垂直渐近线，从而，当t增加时，$z=f(\varphi)$与（8）必交于某点M（图2），然后下降，与$\varphi=2\pi$相交于某点B。由于在区间$[0,2\pi]$上，它不再回到(8)的下方，所以

$$z_B>z_A=\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)},$$

因而，$z=f(\varphi)$是升型解，结论（2）成立。

最后，当$\beta\geqslant 1$时，由于直线$z=\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)}$位于$z=0$的上方，曲线（8）的下方，故其上各点皆有$\frac{dz}{dt}>0$，$\frac{d\varphi}{dt}>0$，因而，过点$A\left(0,\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)}\right)$（2）之轨线，当$\beta\geqslant 1$时，位于$z=\frac{\gamma-1}{\alpha(\beta+1)}$之上方；当$\beta>1$时，由于直线$z=\frac{\gamma+1}{\alpha(\beta-1)}$位于（8）之上方，故其上各点$\frac{dz}{dt}<0$，$\frac{d\varphi}{dt}>0$，因而，(2)的第二类周期解必位于$z=\frac{\gamma+1}{\alpha(\beta-1)}$之下方。定理证毕。

定理2 如果$\beta\geqslant 1$，系统（2）的第二类周期解唯一。

证明 反证。设$f_1(\varphi)$，$f_2(\varphi)$均是（3）第二类周期解，且不妨认为有

$$f_1(\varphi)>f_2(\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

这时

$$f_1(\varphi)\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)f_1(\varphi)+\gamma-\cos\varphi$$

或

$$f_1(\varphi)df_1(\varphi)=-\alpha(\beta-\sin\varphi)f_1(\varphi)d\varphi+(\gamma-\cos\varphi)d\varphi,$$

由0到2π积分上式，得

$$2\pi\gamma=\alpha\int_0^{2\pi}(\beta-\sin\varphi)f_1(\varphi)d\varphi. \tag{9}$$

类似可得

$$2\pi\gamma=\alpha\int_0^{2\pi}(\beta-\sin\varphi)f_2(\varphi)d\varphi. \tag{10}$$

(9)－(10)得

$$\alpha\int_0^{2\pi}(\beta-\sin\varphi)(f_1(\varphi)-f_2(\varphi))d\varphi=0.$$

由假设，上式右端的积分应大于零，此为矛盾，故系统（2）的第二类周期解唯一。

Ⅱ $0<\gamma<1$，$\beta\geqslant 1$

先来分析系统（2）奇点的性质。为此，设$\gamma=\cos\varphi_\circ$，$\varphi_\circ=\arccos\gamma$，$0<\varphi_\circ<\frac{\pi}{2}$，则在区间$[0,2\pi]$上方程

$$\cos\varphi_\circ-\cos\varphi=0$$

的解分别为

$$\varphi^*=\varphi_\circ,\quad \bar{\varphi}=2\pi-\varphi_\circ,$$

从而，(2)在$[0,2\pi]$上的奇点为

$$A_\circ(\varphi^*,0),\quad B_1(\bar{\varphi},0).$$

设

$$P(\varphi,z)=z,\quad Q(\varphi,z)=-\alpha(\beta-\sin\varphi)z+\cos\varphi_\circ-\cos\varphi,$$

则

$$P'_\varphi(\varphi^*,0)=0,\ P'_z(\varphi^*,0)=1;\ Q'_\varphi(\varphi^*,0)=\sin\varphi_\circ,\ Q'_z(\varphi^*,0)=-\alpha(\beta-\sin\varphi_\circ).$$

于是

$$\begin{vmatrix} P'_\varphi(\varphi^*,0), & P'_z(\varphi^*,0) \\ Q'_\varphi(\varphi^*,0), & Q'_z(\varphi^*,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin\varphi_\circ & -\alpha(\beta-\sin\varphi_\circ) \end{vmatrix} = -\sin\varphi_\circ<0,$$

因而，$A_\circ$是（2）的鞍点。

又由于

$$P'_\varphi(\bar{\varphi},0)=0,\ P'_z(\bar{\varphi},0)=1;\ Q'_\varphi(\bar{\varphi},0)=-\sin\varphi_\circ,\ Q'_z(\bar{\varphi},0)=-\alpha(\beta+\sin\varphi_\circ),$$

于是

$$\begin{vmatrix} P'_\varphi(\bar{\varphi},0), & P'_z(\bar{\varphi},0) \\ Q'_\varphi(\bar{\varphi},0), & Q'_z(\bar{\varphi},0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\varphi_\circ & -\alpha(\beta+\sin\varphi_\circ) \end{vmatrix} = \sin\varphi_\circ>0,$$

因而，B_1是（2）的稳定的焦点或结点。

由于系统（2）的周期性质，点$A_k(\varphi^*_k,0)$，$\varphi^*_k=2k\pi+\varphi_\circ$，$k=0,\pm1,\cdots$均是（2）的鞍点；$B_k(\bar{\varphi}_k,0)$，$\bar{\varphi}_k=2k\pi-\varphi_\circ$，$k=0,\pm1,\cdots$ 均是（2）的稳定的焦点或结点。

定理3　如果$0<\gamma<1$，$\beta\geqslant1$，则系统（2）无第一类周期解，但存在唯一的第二类周期解。

证明　由于，当$0<\gamma<0$，$\beta\geqslant1$时

$$\operatorname{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\frac{\partial Q}{\partial z}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)\leqslant0,$$

故（2）此时无第一类周期解。

其次，由引理2，为证明（2）存在第二类周期解，只须证明，（3）在区域H上存在升型解即可。为此，先来讨论$\alpha=0$（$0<\gamma<1$，$\beta\geqslant1$）时的情形。

$\alpha=0$时，（1）′变为

$$\ddot{\varphi}+\cos\varphi=\gamma, \tag{11}$$

与之等价的方程组为

$$\frac{d\varphi}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}=\gamma-\cos\varphi. \tag{12}$$

易证，$A_1(\varphi^*,0)$是系统（12）的鞍点，$B_1(\bar{\varphi},0)$是（12）的中心。

由于系统（12）的周期性质，$A_k(\varphi^*_k,0)$，$\varphi^*_k=2k\pi+\varphi_\circ$，$k=0,\pm1,\cdots$，均是鞍点；$B_k(\bar{\varphi}_k,0)$，$\bar{\varphi}_k=2k\pi-\varphi_\circ$，$k=0,\pm1,\cdots$，均是中心。

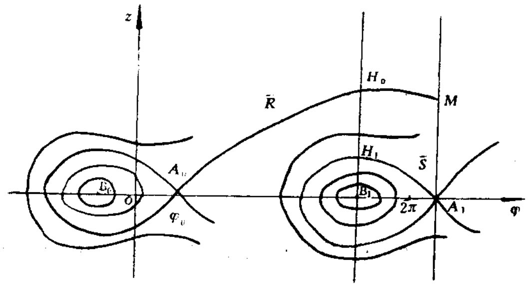

图 3

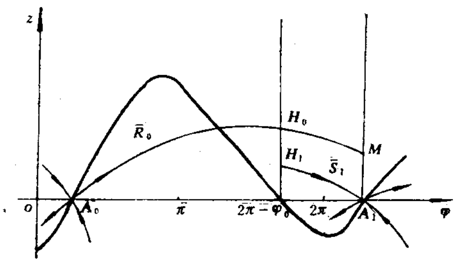

图 4

设系统（12）由A_1点出发且位于A_1点左侧的分界线环与直线$\varphi=2\pi-\varphi_\circ$相交于$H_1$点（图3），由轨线的唯一性，由$A_\circ$点出发的，在$z\geqslant0$上且位于$A_\circ$点右侧的分界线$\bar{R}$与$\varphi=2\pi-\varphi_\circ$的交点$H_\circ$必位于$H_1$之上方：$z_{H_\circ}>z_{H_1}>0$（$z_{H_\circ}$，$z_{H_1}$分别是$H_\circ$，$H_1$点的$z$坐标）。$\bar{R}$从$H_\circ$再向右延展，与$\varphi=2\pi+\varphi_\circ$相交于$M$点，且$z_M>0$。故$\bar{R}$是（12）所对应轨线方程的

一个升型解。同时，从 $(\varphi_\circ, z_\circ)$，$0\leqslant z_\circ\ll 1$，出发的解也是升型解。

下面来研究系统（2）。（8）在 $\varphi=\varphi_\circ$ 点切线斜率为

$$\left.\frac{dz}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_\circ}=\frac{\sin\varphi_\circ}{\alpha(\beta-\sin\varphi_0)},\tag{13}$$

而（2）在点 $A_\circ$ 处分界线的斜率分别为

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}\alpha(\beta-\sin\varphi_\circ)+\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ},\tag{14}$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}\alpha(\beta-\sin\varphi_\circ)-\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ}.\tag{15}$$

下面仅就 $\beta>1$ 情形研究系统（2）的 $A_\circ$ 点分界线的走向，$\beta=1$ 情形类似。

易见，只要 $0<\alpha\ll 1$，就有

$$\left.\frac{dz}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_\circ}>\lambda_1.\tag{16}$$

因而，系统（2）$A_\circ$ 点处右侧分界线的上半支 $\bar{R}_\circ$ 一开始就位于(8)之下方，$z=0$ 的上方。设 $H_\circ$ 是 $\bar{R}_\circ$ 与 $\varphi=2\pi-\varphi_\circ$ 的交点，则 $z_{H_\circ}\geqslant 0$.（图4）。

设 H_1 是 A_1 点左侧分界线的上半支 $\bar{S}_1$ 与 $\varphi=\pi-\varphi_\circ$ 的交点，则 $z_{H_1}>0$。前已证明，当 $\alpha=0$ 时，$z_{H_\circ}>z_{H_1}$，故当 $0<\alpha\ll 1$ 时，仍然有 $z_{H_\circ}>z_{H_1}>0$。设 M 是 $\bar{R}_\circ$ 与 $\varphi=2\pi+\varphi_\circ$ 的交点，由于轨线的唯一性，$y_M>0$，这表明（3）存在升型解 $\bar{R}_\circ$，从而，由引理1，（2）存在第二类周期解，并且，根据定理2，这一第二类周期解唯一。证毕。

定理4 如果 $0<\gamma<1$，$\beta\geqslant 1$，对于系统（2）存在 $\alpha_\circ>0$，使当 $\alpha=\alpha_\circ$ 时，在 $z\geqslant 0$ 上，$A_\circ$ 点右侧分界线 $\bar{R}_\circ$ 与 A_1 点左侧分界线 $\bar{S}_1$ 重合。

证明 记 $\bar{S}_1$：$z=f_1(\varphi)$，则

$$\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi}=\frac{\cos\varphi_\circ-\cos\varphi}{f_1(\varphi)}-\alpha(\beta-\sin\varphi).$$

在区间 $(2\pi-\varphi_\circ,\ 2\pi+\varphi_\circ)$ 上，$\cos\varphi_\circ-\cos\varphi<0$，$f_1(\varphi)>0$，故

$$\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi}<-\alpha(\beta-\sin\varphi).$$

从 $2\pi-\varphi_\circ$ 到 $2\pi+\varphi_\circ$ 积分上式，得

$$z_{H_1}>2\alpha\beta\varphi_\circ.\tag{17}$$

记 $\bar{R}_\circ$：$z=f_\circ(\varphi)$，类似可得

$$\frac{1}{2}z_{H_\circ}^2<2[(\pi-\varphi_\circ)\cos\varphi_\circ+\sin\varphi_\circ].\tag{18}$$

当 $\alpha>0$ 充分大时，比较（17）与（18）式，有

$$z_{H_1}>z_{H_\circ}.$$

根据定理3证明中的讨论，当 $0<\alpha\ll 1$ 时，有 $z_{H_1}<z_{H_\circ}$。因而，存在 $\alpha_\circ$，设当 $\alpha=\alpha_\circ$ 时，$\bar{R}_\circ$ 与 $\bar{S}_1$ 重合。证毕。

定理5 定理4中的 $\alpha_\circ$ 是唯一的。

证明 反证。设系统（2）在 $z\geqslant 0$ 上存在两条联结 $A_\circ$，A_1 的轨道：Γ_1，Γ_2，它们分别对应 α_1，α_2，且 $\alpha_1\neq\alpha_2$。不妨设 $\alpha_1<\alpha_2$。

Γ_1，Γ_2 在 $A_\circ$，A_1 点处的斜率分别是：

$A_\circ$:
$$\rho_0^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1(\beta-\sin\varphi_\circ)+\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_1^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ},$$
$$\rho_0^{(2)}=-\frac{1}{2}\alpha_2(\beta-\sin\varphi_\circ)+\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_2^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ};$$

A_1:
$$\rho_1^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1(\beta-\sin\varphi_\circ)-\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_1^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ},$$
$$\rho_1^{(2)}=-\frac{1}{2}\alpha_2(\beta-\sin\varphi_\circ)-\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_2^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ}.$$

$$\rho_0^{(1)}-\rho_0^{(2)}=\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)(\beta-\sin\varphi_\circ)+\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_1^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ}$$
$$-\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_2^2(\beta-\sin\varphi_\circ)^2+\sin\varphi_\circ}>0,$$

即
$$\rho_0^{(1)}>\rho_0^{(2)}>0.$$

类似可得
$$0<\rho_1^{(1)}<\rho_1^{(2)}.$$

因而，Γ_1，Γ_2在$[\varphi_\circ,\ 2\pi+\varphi_\circ]$必相交点，设其最右侧交点的$\varphi$坐标为$\tilde{\varphi}$，$\varphi_\circ<\tilde{\varphi}<2\pi+\varphi_\circ$.

记
$$\Gamma_1:\ z=z_1(\varphi);\ \Gamma_2:\ z=z_2(\varphi),$$

则
$$z_1(\varphi)>z_2(\varphi),\ \text{在}\tilde{\varphi}\text{的左邻域};$$
$$z_1(\varphi)<z_2(\varphi),\ \tilde{\varphi}<\varphi<2\pi+\varphi_\circ.$$

将$z_1(\varphi)$，$z_2(\varphi)$代入（3），相减后，可得
$$\frac{d}{d\varphi}(z_2^2-z_1^2)\big|_{\varphi=\tilde{\varphi}}<0.$$

从而，在$\varphi=\tilde{\varphi}$的某左邻域上有
$$z_2^2(\varphi)-z_1^2(\varphi)>0,\ (z_2(\varphi)-z_1(\varphi))(z_2(\varphi)+z_1(\varphi))>0,$$

从而
$$z_2(\varphi)>z_1(\varphi).$$

此为矛盾，命题得证。

Ⅲ　$\gamma=1$，$\beta\geqslant1$

当$\gamma=1$，$\beta\geqslant1$时，系统（2）变为
$$\frac{d\varphi}{dt}=z,\ \frac{dz}{dt}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)z+1-\cos\varphi. \tag{19}$$

奇点为$P_k(2k\pi,\ 0)$，$k=0,\ \pm1,\cdots$.

由于
$$\operatorname{div}(P,Q)=\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\frac{\partial Q}{\partial z}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)\leqslant0,$$

故系统（19）不存在第一类周期解。

引理3　如果$(\alpha\beta)^{-1}-\alpha\beta\pi>0$，则
$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{-\alpha(\beta-\sin\varphi)+1-\cos\varphi}{z} \tag{20}$$

在上半柱面存在升型解。

证明　设 $z=f_1(\varphi)$ 是（20）满足初始条件

$$\varphi=\frac{\pi}{2},\quad z=z_\circ,\quad 0<z_\circ<(\alpha\beta)^{-1}-\alpha\beta\pi$$

的解，则在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi\right]$ 上，有

$$\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)+\frac{1-\cos\varphi}{f_1(\varphi)}\leqslant\frac{1-\cos\varphi}{f_1(\varphi)}$$

或

$$\frac{1}{2}df_1^2(\varphi)\leqslant(1-\cos\varphi)d\varphi.$$

从 $\frac{\pi}{2}$ 到 φ，$\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\frac{5}{2}\pi$，积分上式，得

$$f_1(\varphi)\leqslant\sqrt{z_0^2+2(1-\sin\varphi)+2\varphi-\pi}.$$

故在 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi\right]$ 上，有

$$\frac{dz}{d\varphi}=-\alpha(\beta-\sin\varphi)+\frac{1-\cos\varphi}{z}\geqslant-\alpha(\beta-\sin\varphi)+\frac{1-\cos\varphi}{\sqrt{z_0^2+2(1-\sin\varphi)+2\varphi-\pi}}.$$

从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{5}{2}\pi$ 积分上式，得

$$f_1\left(\frac{5}{2}\pi\right)-f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant-2\alpha\beta\pi+\sqrt{z_0^2+4\pi}-z_\circ.$$

由假设

$$0<z_\circ<(\alpha\beta)^{-1}-\alpha\beta\pi,$$

故

$$\sqrt{z_0{}^2+4\pi}-z_\circ-2\alpha\beta\pi>0,$$

从而

$$f_1\left(\frac{5}{2}\pi\right)>f_1\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

故 $f_1(\varphi)$ 是（20）的一个升型解。证毕。

定理6　如果 $(\alpha\beta)^{-1}-\alpha\beta\pi>0$，则系统（19）存在唯一的第二类周期解。

证明　第二类周期解的存在性，可由引理2及引理3推出；其唯一性，可由定理2推出。证毕。

科学院数学所副研究员王联及东北师大数学系黄启昌副教授对本文均提出了宝贵意见，在此一并致以谢意。

参　考　文　献

[1] Андронов, А. А., Витт. А. А., Хсйкин, И. Э., Теория Колебанций, Москва, 1959.

[2] Sansene, G., Conti, R., Non-linear Differential Equations, 1964(英文版).

[3] 陈兰荪，锁相技术中的一个常微分方程的定性研究，数学认识与实践，1973,3.

[4] 王联，王慕秋，锁相技术中一些常微分方程的定性研究及一些常微分方程稳定性理论的应用（1979年王联在东北师大讲学资料）。