第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITJON

Vol.4 No.3
July 1984

大基数公理的分类及其相互关系*

肖奚安

（中国人民解放军空军气象学院）

提要

本文用分类的办法介绍了若干大基数的定义及有关重要结果，以统一的性质考察了它们间的相互关系，最后又划分出强、弱型大基数。

现代公理化集合论的两大主要部分就是：一、用力迫法证明各种独立性结果；二、大基数公理。如果说前者是以其方法的技巧性和所得结果的深刻性而被誉为现代集合论高度发展的标志的话，则可以说后者主要以其研究方法的多样、涉及范围的广泛而成为集合论的一个庞大分支。鉴于此，本文着重理清各种大基数间错综复杂的相互关系，这将为具备了公理集合论的基础知识而想进一步研究大基数公理的读者提供方便。

§1 不可到达性大基数

首先讨论ω的不可到达性。容易证明：若每个$A_\alpha\subseteq\omega$是ω的有穷子集，而$n<\omega$，则有$|\bigcup_{\alpha<n}A_\alpha|<\omega$；若$n<\omega$，则$n^+<\omega$，$2^n<\omega$。这就是说，对于基数小于$\omega$的集合进行一定的运算后，所得集合的基数仍小于$\omega$。我们把这种性质称为不可到达性。鉴于上述第一种不可到达性的重要，我们将给予特别名称“正规”，并用共尾数的符号记为$\mathrm{cf}(\omega)=\omega$[3]。

考察无穷基数$\aleph_1,\aleph_2,\cdots,\aleph_\omega,\cdots\cdots$知道其中每一个都只能具有上面列举的$\omega$的不可到达性中的一条，而不能全都具有。假定某一基数同时具备好几条不可到达性，这就导致下列定义。

1.1.定义 χ是弱不可到达基数指：1）$\chi>\omega$，2）$\mathrm{cf}(\chi)=\chi$，3）$\forall\alpha<\chi(\alpha^+<\chi)$。

1.2.定义 χ是强不可到达基数指：1）$\chi>\omega$，2）$\mathrm{cf}(\chi)=\chi$，3）$\forall\alpha<\chi(2^\alpha<\chi)$。

注意到$\alpha^+\leqslant2^\alpha$，在广义连续统假设下$\alpha^+=2^\alpha$，故有

1.3.定理 强不可到达基数必为弱不可到达基数，在GCH之下，两者全同。

对于强不可到达基数，最重要的结果是：

1.4.定理 （[2]或[6]）χ是强不可到达的，则V_χ是ZFC的模型。故在存在强不可到达基数的假定之下，ZFC相容。

由1.4.可得(见[1])：

*1981年10月8日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

1.5.定理　"存在强不可到达基数"与"存在弱不可到达基数"均不是ZFC的定理.

这样，强、弱不可到达基数都称作"大基数",而"存在强不可到达基数"就称作大基数公理.

类似地,考察正规基数集合中的某些不可到达性,也可定义出所谓"强、弱 Mahlo 基数"这样的大基数来([6]、[1]),它们与强、弱不可到达基数及相互之间关系可见§3中表格，不再详述.

循此路线，还可由 Mahlo 基数进而定义超 Mahlo 基数等等更大的大基数，但我们认为那已得不到什么更新的东西了.

§2　紧致性大基数

弱紧基数是大基数系统中最核心的概念，它有各种不同的等价条件.它与强紧基数都是由讨论ω的紧致性而导致的.

我们知道一个熟知的紧致性定理：

2.1.定理　语言$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的任一语句集可满足当且仅当它的每个有穷子集可满足.

把这种紧性向各个方向推广，就得到各种紧致性基数.

2.2.定义　称基数$\chi>\omega$是*弱紧的*，若：语言$\mathscr{L}_{\chi\chi}$中任何只用到$\leqslant\chi$个非逻辑符号的语句集有模型当且仅当它的每个基数$<\chi$的子语句集有模型.

弱紧基数的等价性质很多，最重要的是

2.3.定理　(见[7])对于$\chi>\omega$，χ是弱紧的等价于$\chi\to(\chi)^2_2$.

其中$\chi\to(\chi)^2_2$是一种所谓*分隔性质*.弱紧基数与 Mahlo 基数间的关系由下面两条定理通过性质(*)建立起来.

2.4.定理　(Kunen 1977,见[1])　若χ是弱紧的，则

(*)　χ是强不可到达的,且对于χ的每个驻集S，存在不可数正规序数$\lambda<\chi$，使$S\cap\lambda$是λ的驻集.

2.5.定理　(Hanf 等1964,见[1])　满足(*)的χ是强 Mahlo 基数，且χ以下的强 Mahlo 基数组成χ的驻集.

在大多数文献中，弱紧定义如上，但在[6]中，弱紧却定义如下：

2.6.定义　如果$\chi>\omega$且语言$\mathscr{L}_{\chi\chi}$的任何基数为χ的语句集Σ有模型当且仅当Σ的每个基数$<\chi$的子语句集有模型，则称χ是*弱紧的*.

为区别起见，将2.2及2.6所定义的弱紧分别称作弱紧1和弱紧2.两者间的关系由笔者给出的下面两定理刻划：

2.7.定理　χ是弱紧1的等价于χ是弱紧2的且χ是强不可到达的.

2.8.系　在GCH之下，弱紧1同于弱紧2.

文[6]证明了：

2.9.定理　若χ是弱紧2的，则χ是弱 Mahlo 的.

如果把弱紧1和弱紧2定义中对语句集的限制统统取消，就得到强紧的定义：

2.10.定义　χ称为*强紧的*，若$\chi>\omega$且任取语言$\mathscr{L}_{\chi\chi}$的语句集Σ(即不限制Σ只用到$\leqslant\chi$个非逻辑符号，也不限制Σ的基数$\leqslant\chi$),只要Σ的每个基数$<\chi$的子集有模型，Σ就

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

有模型。

强紧基数是本文介绍的最大的大基数。关于它，有如下两条重要结论。

2.11.定理　(Vopěnka-Hrdáček 1966,见[13]) 若存在强紧基数，则对任何集X，$V \neq L[X]$。

其中 L[X] 是由 X 出发的可构造集。通常说的可构造集即 $L[\emptyset]$。故这是比否定可构造公理 V＝L 更强的结论。此外，Solovay 1974 用力迫法证明了(见[12])：

2.12.定理　若 χ 是强紧的，则对于每个大于 χ 的奇异强极限基数 λ，有 $2^\lambda=\lambda^+$。

由此知，在存在强紧基数的假定下，GCH 只对一些很特殊的基数可以判断为真。

§3　可测性大基数

Ulam 1930 年首先引入了抽象测度(χ-$\mathscr{C}$测度和 χ-2 测度)的概念(见[3])，用它可以定义可测基数。

3.1.定义　基数 $\chi>\omega$ 称为实值（二值）可测的，指势为 χ 的任何集合 A 都存在 χ-$\mathscr{C}$(χ-2)测度。

实值可测基数与别的大基数间关系如下：

3.2.引理　(Solovay 1971,见[1]) 若 χ 是实值可测基数，则有

(**)　χ 是弱不可到达的，且对 χ 的每个驻集 $S\subseteq\chi$，存在正规序数 $\lambda<\chi$，使 $S\cap\lambda$ 是 λ 的驻集。

3.3.定理　满足(**)的 χ 是弱 Mahlo 基数，且 χ 以下的弱 Mahlo 基数组成 χ 的驻集。

两种可测基数间的联系则由以下三条确定：

3.4.引理　二值可测基数是实值可测的。

3.5.定理　(Ulam 1930,见[1]) 每个实值可测基数要么 $\leqslant 2^{\aleph_0}$，要么是二值可测基数。

3.6.系　在 GCH 之下，实值可测基数与二值可测基数相同。

下面这条定理深刻地揭示了在 GCH 不成立的情况下，两种可测基数之间的鸿沟：

3.7.定理　(Solovay 1971,见[1]) 若“ZFC＋存在二值可测基数”相容，则“ZFC＋存在 $\leqslant 2^{\aleph_0}$ 的实值可测基数”也相容。

至于二值可测基数（简称可测基数）与其它大基数的关系有：

3.8.定理　(见[1]) 可测基数是弱紧1的。

3.9.定理　(见[6]) 强紧基数是可测基数。

至此，我们可以把所介绍过的大基数间的关系用如下表格示意出来（见下页）：

对照下表的左右两列，自然产生这样的问题：1、弱紧2基数是否有性质(**)？2、实值可测基数是否是弱紧2的？目前尚不可知。

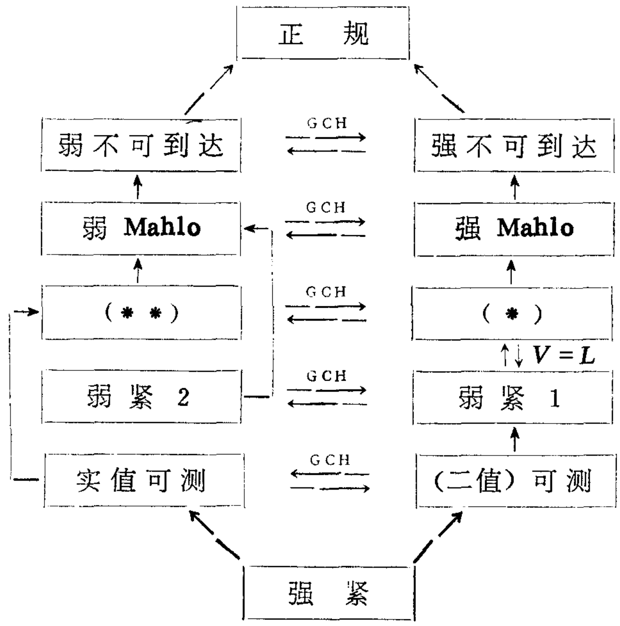
可测基数有一个很强的分隔性质：

3.10.定理　(Rowbottom 1964,见[13]) 若 μ 是可测基数 χ 的标准测度，则对任何 $\lambda<\chi$，有 $\chi\to_\mu(\chi)^{<\omega}_\lambda$。

以上符号的意义可见[1]和[13]。下面介绍几条有关 V＝L 及 GCH 的重要结果。

3.11.定理　(Rowbottom,见[6]) 若存在可测基数 χ，则对于每个基数 λ，$\omega\leqslant\lambda<\chi$，仅有 λ 个可构造子集，即 $|\mathscr{P}(\lambda)\cap L|=\lambda$。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.



3.12.系 若存在可测基数，则只有可数个自然数子集是可构造的，因而，V≠L.

Lévy 和 Solovay 1967[11]用力迫法证明了下列重要的独立性结果：

3.13.定理 设“ZF＋存在可测基数”(记为ZFM系统)相容，则“ZFM＋CH”与“ZFM＋7CH”也都相容。

此即，ZFM仍无法判定CH的真假！

§4 分隔性质大基数

弱紧1基数是具有很典型分隔性质$\chi\to(\chi)^2_2$的大基数。把这一性质向两个方向推广，就得两种统称为分隔性质大基数的大基数。

4.1.定义 称χ是不可表达的，如果满足$\chi\to$(驻集)$^2_2$.

4.2.定义 称χ是Ramsey基数，如果满足$\chi\to(\chi)^{<\omega}_2$.

符号的意义均可参见[1]。有如下性质：

4.3.定理 (见[1]) 可测基数是分隔性质大基数；分隔性质大基数是弱紧1的。

4.4.定理 (Scott 1961，Rowbottom 1971，见[1]及[13]) 若存在Ramsey基数，则V≠L.

§5 分隔关系与翻转性质

以上四节介绍了各种主要的大基数。我们看到，各种大基数是以那么不同的方式定义着，以致比较它们相当困难。数学家为用统一的性质来刻划多种大基数作了大量工作，从本节起介绍这方面的概况。

首先，笔者曾经证明：

5.1.引理 α是正规的$\Leftrightarrow\forall\beta<\alpha[\alpha\to(\alpha)^1_\beta]$.

5.2.引理 χ是弱不可到达的$\Leftrightarrow\chi>\omega$且$\forall\gamma<\chi[\chi\to(\chi)^1_{\gamma^+}]$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

5.3.引理　χ 是强不可到达的$\Leftrightarrow\chi>\omega$ 且 $\forall\gamma>\chi[\chi\rightarrow(\chi)^{\frac{1}{2}}_{\nu}]$.

联系到前几节的2.3，3.10，4.1 及 4.2，我们可以清楚地看到一幅用分隔关系刻划众多大基数的总图画.

由 F.G.Abramson 等人 1977 年引入的所谓“翻转”概念(见[8])也很成功地刻划了多种大基数，尤为重要的是它给出了可测基数的一个充要条件，这是至今我们见到的唯一充要条件. 但翻转概念本质上是分隔性质的变形，故限于篇幅，我们不详加介绍了.

§6　不可描述性

6.1.定义　序数 α 为π^m_n-（或Σ^m_n-）不可描述的，是指对任何仅含一个二阶变元 X 的π^m_n-(或Σ^m_n-)公式 $\phi(X)$，若有 $R\subseteq V_\alpha$使$\langle V_\alpha, \in\restriction V_\alpha, R\rangle\models\phi(R)$，则有 $\beta<\alpha$，使$\langle V_\beta, \in\restriction V_\beta, R\cap V_\beta\rangle\models\phi(R\cap V_\beta)$.

这使我们想起*反射原理*[6]. 简略地说，反射原理断定，在全集 V 中成立的语句，也一定可在某一层结构 V_β 中成立. 不可描述则是说到某 α 层成立的语句，定可在 α 之前的某 β 层成立.因此，这就不难理解，不可描述性可以用来刻划具有“很大的”特征的大基数.

6.2.定理　χ 是强不可到达的$\Leftrightarrow\chi$ 是 π^1_0-不可描述的$\Leftrightarrow\chi$ 是 Σ^1_1-不可描述的.

6.3.定理　χ 是弱紧 1 的$\Leftrightarrow\chi$ 是π^1_1-不可描述的，

6.4.定理　可测基数是 π^2_1-不可描述的.

不可描述性只给少数几种大基数以统一的刻划，但用此概念还可定义出*ν-不可描述的*，*全不可描述的*等新的大基数.

§7　弱型与强型大基数

在§3 所列的表中，左右两列大基数间的关系很引人注目：它们都以 GCH 联系在一起. 这促使我们作如下定义：

7.1.定义　若 B 类大基数必为 A 类大基数，在 GCH 之下两类全同，则称 A、B 类大基数构成一对*弱、强型大基数*.

由前可知：

7.2.定理　以下五对大基数构成四对弱、强型：弱不可到达与强不可到达，弱 Mahlo 与强 Mahlo，(**)与(*)，弱紧 2 与弱紧 1，以及实值可测与二值可测.

我们还证明了如下的定理：

7.3.定理　若 χ 是以上五种弱型大基数之一，又是强不可到达的，则 χ 就是对应的强型大基数.

*　　*　　*

我们在 §1—§4 用分群的办法介绍了各种大基数，在 §5—§7 用统一的性质考察了大基数，并且又划分了弱、强大基数，相信有志于涉猎艰深大基数问题的读者，可以通过阅读本文而领略到有关大基数的粗略全貌了.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

参 考 文 献

[1] Lèvy, A., Basic Set Theory, 1979.

[2] Shoenfield, R., Mathematical Logic, 1967.

[3] Kuratowski, K. & Mostowski, A., Set Theory, 1976.

[4] Schütte, K., Proof Theory, 1977.

[5] Barwise, J., Handbook of Mathematical Logic, 1977.

[6] Drake, F., Set Theory, *An introduction to large cardinals*, North-Holland, 1974.

[7] Devlin, K. J., Indescribability properties and small large cardinals, in: *Lecture Notes Math.*, 499(1975), 89—114.

[8] Abramson, F. G., Harrington, L. A., Kleinberg, E. M. & Zwicker, W. S., Fliping properties: A unifying thread in the theory of large cardinals, *Annals of Math. logic*, 12(1977), 25—58.

[9] Kleinberg E. M. & Shore, R. A., On large cardinals and partition relations, *J. Sym. Logic* Vol. 36, No. 2, (1971), 305—308.

[10] Kleinberg, E. M., Infinitary Combinatorics, in: *Lectuie Notes Math.*, 337(1971), 361—417.

[11] Lèvy, A. & Solovay, R. M., Measurable cardinals and the continuum hypothesis., *Israel J. Math.*, 5(1967), 234—248.

[12] Solovay, R. M., Strongly compact cardinals and the G. C. H., in: Selected papers on set theory; Constructible method & forcing method, 1974, 317—324.

[13] Kanamori, A. and Magidor, M., The evolution of large cardinal axioms in set theory, in: *Lecture Notes Math.*, 669, 99—276.

[14] Boos, W., Lectures on large cardinal axioms, in: *Lecture Notes Math.*, 499(1975), 25—88.

The Classifications of Large Cardinal Axioms and Their Relations

Xiao Xian (肖奚安)

(The Meteorology Instrtute of the Air Force of P.L.A.)

Abstract

In this paper, the definitions and results of various large cardinals are introduced by means of the classification, their relations are checked by some unified properties, and the large cardinals of weakly type and strongly type are partitioned.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.