第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

Wolk 两个定理的推广*

李伯渝

（西北大学）

[1]中定理3.6是经典的Dini定理的推广。Wolk在证明了这个定理后指出，有例子说明，若将值域空间Y的全无序集（即反链）有限性条件去掉后，此定理将不成立。于是他提出了一个可供进一步思考的问题：是否可用另外一些拓扑代替Y中的Dedekind拓扑，去掉Y中全无序集有限性条件后，此定理或它的某种变形依然成立？按照这个思路我们将[1]中定理3.6和3.9进行了推广。为此，先摘录两个主要概念如下：

Dedekind拓扑[1]：设P为半序集。$A\subset P$称为是Dedekind闭的，当且仅当，A中每个上（下）定向集在其上（下）确界存在时它必属于A。以Dedekind闭集族为闭集族的拓扑称为P的Dedekind拓扑。

连续收敛[1]：拓扑空间X到拓扑空间Y的函数网$\{f_n: n\in D\}$在点$x_0\in X$连续收敛于$f\in Y^X$是指，对X中任意收敛于x_0的网$\{x_m: m\in E\}$，Y中的网$\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$收敛于$f(x_0)$。在$X$上连续收敛是指：$\{f_n: n\in D\}$在每个点$x\in X$连续收敛于$f$。

引理1 设Y是半序集，其中有拓扑$\mathscr{T}$，它存在一个子基$\mathscr{B}$，满足下列条件：对任意$B\in\mathscr{B}$，至少具有以下二性质之一：

(i) $y_1\in B$，$y_2\geqslant y_1\Rightarrow y_2\in B$；(ii) $y_1\in B$，$y_2\leqslant y_1\Rightarrow y_2\in B$。$X$是任意拓扑空间。$\{f_n: n\in D\}$是$X\to Y$函数网，它点态收敛于$f\in Y^X$。在任意$x\in X$，$\{f_n(x): n\in D\}$是单调增加的。若$f$和每个$f_n$都是连续的，那么$\{f_n: n\in D\}$在$X$上连续收敛于$f$。

证明 令$x\in X$，X中网$\{x_m: m\in E\}$收敛于x。我们将证明Y中网$\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$收敛于$f(x)$。为此，只需证明：对任意$B\in\mathscr{B}$，$f(x)\in B$，该网最后在$B$之中。

设B满足条件(i)。由$\{f_n(x): n\in D\}$收敛于$f(x)$，将存在$N\in D$，当$n\geqslant N$时$f_n(x)\in B$。根据f_N的连续性和$f_N(x)\in B$，存在$M\in E$，使$m\geqslant M$时$f_N(x_m)\in B$。再由$\{f_n: n\in D\}$的单调增加性，在$n\geqslant N$，$m\geqslant M$时$f_n(x_m)\geqslant f_N(x_m)\in B$。由$B$满足(i)，$(n,m)\geqslant(N,M)$时$f_n(x_m)\in B$。

下面设B满足条件(ii)。根据f的连续性，存在$M\in E$，当$m\geqslant M$时$f(x_m)\in B$。我们断言，对任意$m\geqslant M$和$n\in D$，$f_n(x_m)\in B$。假设不然，即存在$m_0\geqslant M$和$n_0\in D$，使$f_{n_0}(x_{m_0})\overline{\in} B$。根据网$\{f_n(x_{m_0}): n\in D\}$的单调增加性和$B$满足条件(ii)，对于一切$n\geqslant n_0$，$f_n(x_{m_0})\overline{\in} B$，这与网$\{f_n(x_{m_0}): n\in D\}$收敛于$f(x_{m_0})\in B$矛盾。 ∎

* 1981年12月29日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由定义可以直接看出，区间拓扑[4]满足引理 1 中$\mathscr{T}$的条件，于是引理 1 中将Y的拓扑取成区间拓扑结论依然成立，也就是有：

定理 1　若将〔1〕中定理 3.6 中Y的 Dedekind 拓扑换成区间拓扑，则去掉Y的全无序集有限性条件后，该定理依然成立。

T. Naito[2] 和 R. W. Hansell[3] 都证明了：若半序集的全无序集都是有限的，那么它的区间拓扑与 Dedekind 拓扑全同。于是〔1〕的定理 3.6 可视为定理 1 的直接推论。

下面将对〔1〕中定理 3.9 作同样性质的推广。

引理 2　设X和Y都是半序集，X中全无序集是有限的。Y中带有拓扑$\mathscr{T}$，满足引理 1 中的条件。X中带有拓扑τ，满足下列条件：

(iii) 当X中单调上升（下降）的网收敛于某点时，该点必是这个网的上界（下界）。

设$\{f_n: n\in D\}$是$X\to Y$的函数网，它点态收敛于连续函数$f\in Y^X$，且

(iv) 每个f_n是单调增加的函数；

(v) 对于每个$x\in X$，$f(x)$是$\{f_n(x): n\in D\}$的上界。

那么在X上$\{f_n: n\in D\}$连续收敛于f。

证明　设$x\in X, B\in\mathscr{B}, f(x)\in B$，$X$中网$\{x_m: m\in D\}$收敛于$x$。要证$Y$中网$\{f_n(x_m): (n,m)\in D\times E\}$最后在$B$中。

先设B满足条件(ii)。利用f的连续性，存在$M\in E$，使$m\geqslant M$时$f(x_m)\in B$。根据(v)和B满足条件(ii)，对任意$m\geqslant M$和$n\in D$有$f_n(x_m)\in B$。

下面主要考虑B满足(i)的情况。先证明如下结论：

(*) 若$\{x_m: m\in E\}$是单调的，则$\{f_n(x_m): (n,m)\in D\times E\}$最终在$B$之中。

设$\{x_m: m\in E\}$是单调增加的。利用f的连续性，存在$M\in E$，使$m\geqslant M$时$f(x_m)\in B$，特别有$f(x_M)\in B$。由于$\{f_n(x_M): n\in D\}$收敛于$f(x_M)$，存在$N\in D$，使$n\geqslant N$时$f_n(x_M)\in B$。利用$\{x_m: m\in E\}$是单调增加的和(iv)，当$m\geqslant M$，$n\geqslant N$时$f_n(x_m)\geqslant f_n(x_M)\in B$。而$B$满足(i)保证了这时$f_n(x_m)\in B$。

设$\{x_m: m\in E\}$是单调下降的。利用$\{f_n(x): n\in D\}$收敛于$f(x)$，存在$N\in D$，使$n\geqslant N$时$f_n(x)\in B$。根据(iii)，对于每个$m\in E$，$x_m\geqslant x$。再利用(iv)，对任意$n\geqslant N$和$m\in E$，$f_n(x_m)\geqslant f_n(x)\in B$。于是$B$满足(i)保证了这时$f_n(x_m)\in B$。

下面将去掉$\{x_m: m\in D\}$单调的假设，来证明$\{f_n(x_m): (n,m)\in D\times E\}$最后在$B$中。

假设不然，即存在$D\times E$的一个共尾子集F，使$\{f_n(x_m): (n,m)\in F\}\subset Y\backslash B$。定义函数$S: F\to D$和$T: F\to E$如下：对任意$(n,m)\in F$，$S(n,m)=n$，$T(n,m)=m$。显然$S$和$T$都是单调增加的，而且由$F$在$D\times E$中共尾可得$S$和$T$的值域分别在$D$和$E$中共尾。所以$\{f_{s(n,m)}: (n,m)\in F\}$和$\{x_{T(n,m)}: (n,m)\in F\}$分别是$\{f_n: n\in D\}$和$\{x_m: m\in E\}$的子网。

由于X的全无序集有限，根据[3]的定理 2，$\{x_{T(n,m)}: (n,m)\in F\}$有单调子网，即存在定向集$L$和函数$R: L\to F$，使网$\{x_{T\circ R(K)}: K\in L\}$是它的单调子网。同时$\{f_{S\circ R(K)}: K\in L\}$是$\{f_{s(n,m)}: (n,m)\in F\}$的子网，也是$\{f_n: n\in D\}$的子网。显然$\{f_{S\circ R(K)}: K\in L\}$和$\{x_{T\circ R(K)}: K\in L\}$满足本定理中$\{f_n: n\in D\}$和$\{x_m: m\in E\}$所满足的一切条件。把已证明的结论(*)用于它们，可得：Y中网$\{f_{S\circ R(K_1)}(x_{T\circ R(K_2)}): (K_1,K_2)\in L\times L\}$最终在$B$中。显然$L\times L$的

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

对角线 $\Delta=\{(K,K):K\in L\}$ 在 $L\times L$ 中是共尾的，那么网 $\{f_{S\circ R(K)}(x_{T\circ R(K)}):K\in L\}$ 也最终在 B 中。

但另一方面，对于每个 $K\in L$，$R(K)\in F$，且 $R(K)=(S\circ R(K),T\circ R(K))$，那么 $f_{S\circ R(K)}(x_{T\circ R(K)})$ 属于 $\{f_n(x_m):(n,m)\in F\}$ 的值域。于是 $\{f_{S\circ R(K)}(x_{T\circ R(K)}):K\in L\}\subset Y\backslash B$。

这个矛盾就证明了：

(**) 在 B 满足条件(i)时，$\{f_n(x_m):(n,m)\in D\times E\}$ 最终在 B 之中。

若让 X 和 Y 都带有区间拓扑，那么引理 2 对 $\mathscr{T}$ 的要求满足。根据 Naito 和 Hansell 的结果和 [1] 引理 3.3，引理 2 对 τ 的要求也满足。于是这时引理 2 依然成立。也就是有：

定理 2　对 [1] 的定理 3.9 的条件做如下改动后结论依然成立：去掉值域 Y 中全无序集有限性条件；将定义域 X 和值域 Y 中的Dedekind拓扑换成区间拓扑；将 $f(x)$ 是 $\{f_n(x):n\in D\}$ 的上确界减弱成上界。

仍根据 Naito 和 Hansell 的结界，Wolk 的定理 3.9 可视为定理 2 的直接推论。

最后，对作者的老师王成堂教授的鼓励和指导表示衷心感谢。

参　考　文　献

[1] Wolk, E. S., Continuous convergence in partially ordered sets, *General Topology and its Applications*, 5 (1975), 221—234.

[2] Naito, T., On a problem of Wolk in interval topologies, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 (1960), 156—158.

[3] Hansell, R. W., Monotone subnets in partially ordered sets, *Proc. Amar. Math. Soc.*, 18 (1967), 854—858.

[4] Orrin Frink, Topology in lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 51 (1942), 568—582.

[5] Wolk. E. S., Order-compatible topologies on a portially order set, *Prec. Amar. Math. Soc.*, 9 (1958—59), 524—529.

[6] Kelley. J. L., General Topology, New York, 1955.

Generalization of Two Wolk's Theorems

Li Boiyu

Abstract

In his paper [1] E. S. Wolk generalized Dini theorem and another classical theorem. In Wolk's theorems ranges are partially ordered sets with Dedekind topology in which totally unordered subsets are finite. In this paper by Wolk's problem interval topology in partially ordered sets is substituted for Dedekind topology without the finiteness condition on totally unordered subsets of ranges, and Wolk's theorems become the direct corollaries of our results.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.