单调减凝聚映象的不动点定理*

季 国 祯

（江西师范大学数学系）

郭大钧[1]和[4]给出了单调减全连续映象的不动点定理，并用于核物理中一个非线性积分方程的求解。本文把它拓广到凝聚映象，从而拓广了[1]和[4]的结果。

定理 设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中一个正规锥，A: $P\to P$ 是单调减凝聚映象。那末（i）A 在 P 中至少有一个不动点 x^*，$\theta\leqslant x^*\leqslant A\theta$；（ii）$A^2$ 在 P 中的不动点唯一时，A 在 P 中的不动点唯一并且对任何 $x_0\in P$ 作迭代序列

$$x_{n+1}=Ax_n\ (n=0,1,2,\cdots)，\ 均有\ \|x_n-x^*\|\to 0\ (n\to\infty)。$$

证明 由 $A\theta\in P$，$\theta\leqslant A\theta$。又由 P 正规，有序区间 $[\theta, A\theta]$ 是有界凸闭集。A 是减映象。对每个 $x\in P$，$\theta\leqslant x$，$\theta\leqslant Ax\leqslant A\theta$。于是 $A([\theta,A\theta])\subset[\theta,A\theta]$，即 A 是 $[\theta, A\theta]\to[\theta, A\theta]$ 的凝聚映象。由 Sadovski[2]一定理知 A 在 $[\theta,A\theta]$ 上至少具有一个不动点 x^*，(i) 获证。再来证 (ii)：由 A 是减映象，A^2 必是增映象。$A^2([\theta,A\theta])\subset[\theta,A\theta]$。令 $u_0=\theta$，$u_1=A\theta$，$u_{n+1}=Au_n$ $(n=1,2,\cdots)$，有 $\theta=u_0\leqslant u_2\leqslant u_4\leqslant\cdots\leqslant u_{2n}\leqslant\cdots\leqslant u_{2n+1}\leqslant\cdots\leqslant u_3\leqslant u_1=A\theta$。序列 $\{u_{2n}\}$ 和 $\{u_{2n+1}\}$ 均是有界集。由[3]引理 1 知 $\{u_{2n}\}$ 和 $\{u_{2n+1}\}$ 都是相对紧集，从而存在子序列 $\{u_{2n_k}\}$ 和 $\{u_{2n'_k+1}\}$ 收敛：$u_{2n_k}\to u_*$，$u_{2n'_k+1}\to u^*$ $(k\to\infty)$。

当 $m>n_k$ 时，$\theta\leqslant u_*-u_{2m}\leqslant u_*-u_{2n_k+2}$。由 P 的正规性知范数关于 P 半单调，即存在 $N>0$，使得 $\|u_*-u_{2m}\|\leqslant N\|u_*-u_{2n_k+2}\|\to 0$ $(k\to\infty)$。故得 $u_*=\lim\limits_{m\to\infty}u_{2m}$。同理可证：$u^*=\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}$。由 P 是闭的，$\theta\leqslant u_*\leqslant u^*$。又从 A 的连续性知

$$A^2u_*=u_*,\quad A^2u^*=u^*,\quad Au^*=u_*,\quad Au_*=u^*.$$

由 (ii) 的假设，A^2 的不动点唯一，$u_*=u^*=x^*$，即 A 的不动点唯一。对任何 $x_0\in P$，有 $\theta\leqslant Ax_0\leqslant A\theta$，即 $u_0\leqslant x_1\leqslant u_1$；用 A 继续作用下去得 $Au_0\geqslant Ax_1\geqslant Au_1$，即 $u_2\leqslant x_2\leqslant u_1$；$Au_2\geqslant Ax_2\geqslant Au_1$，即 $u_3\geqslant x_3\geqslant u_2$；…，一般地，$u_{2n}\leqslant x_{2n+1}\leqslant u_{2n+1}$，$u_{2n}\leqslant u_{2n+2}\leqslant x_{2n+2}\leqslant u_{2n+1}$。由 P 的正规性，$\theta\leqslant x_{2n+1}-u_{2n}\leqslant u_{2n+1}-u_{2n}$，$\|x_{2n+1}-u_{2n}\|\leqslant N\|u_{2n+1}-u_{2n}\|$，

$$\|x_{2n+1}-x^*\|=\|x_{2n+1}-u^*\|\leqslant\|x_{2n+2}-u_{2n}\|+\|u_{2n}-u^*\|\leqslant N\|u_{2n+1}-u_{2n}\|+\|u_{2n}-u^*\|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

同理可证：$\|x_{2n+2}-x^*\|\to 0$ $(n\to\infty)$。综合得 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。(ii) 的结论获证。

参 考 文 献

[1] 郭大钧，非线性算子的正不动点及其应用，全国第三次泛函分析学术交流会文献，山东大学数学系，5（1983）。

[2] Sadovski, B. N., A fixed point principle, *Functional Anal. Appl.*, 1(1967), 151—153.

[3] Daher, S. J., On a fixed point principle of Sadovski, *Nonliear Anal. Theory Mathods & Appl.*, 2:5(1978), 643—645.

[4] 郭大钧和张庆雍，核物理中一个非线性积分方程解的唯一性，科学通报，15(1979)。

*1983年12月28日收到。