第4卷 第4期 数学研究与评论 Vol.4 No.4
1984年10月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Oct. 1984

关于愉快图的Bodendiek猜想*

马克杰 冯成进

（山东曲阜师范学院）

一个简单图G称为愉快的（Graceful Graph），如果存在用集合$S=\{0,1,2,\cdots,\varepsilon\}$（其中$\varepsilon=\varepsilon(G)$）中不同整数的顶点标号$l$，使得如下定义的诱导边标号$l'$对每条边都有不同的标号：

$$l'(uv)=|l(u)-l(v)|.$$

我们知道，含有n个顶点的圈C_n是愉快图的充要条件为$n\equiv 0,3 \pmod 4$[1]。因此当$n\equiv 1,2 \pmod 4$时C_n就不是愉快图。但可以验证，对一些C_n增加一条边后所得的图是愉快图。H. Bodendiek等提出猜想[1]：

猜想 一个圈任意加上一条联接两个不相邻顶点的边所得的图是愉快图。

本文的结论是：对于含有n个顶点的圈C_n总可以加上一条联接两个不相邻顶点的边，使所得的图C_n'是愉快图。

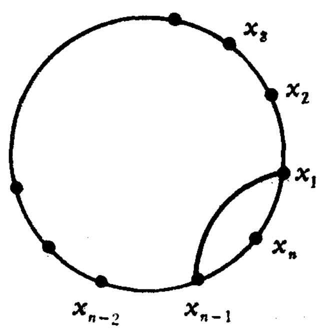

图 1

引理1 当$n\equiv 1 \pmod 4$时，图1所示的图C_n'是愉快图。

证 由$\varepsilon(C_n')=n+1$，$n\equiv 1 \pmod 4$及$S=\{0,1,2,\cdots,n+1\}$，我们采用下述顶点标号l：

$$l(x_n)=n+1,\quad l(x_{n-1})=0;\quad l(x_{2k+1})=n-k,\quad \left(k=0,1,2,\cdots,\frac{n-3}{2}\right);$$

$$l(x_{2k})=k,\quad \left(k=1,2,\cdots,\frac{n-5}{4}\right);\quad l(x_{2k})=k+1,$$

$$\left(k=\frac{n-1}{4},\ \frac{n-1}{4}+1,\cdots,\ \frac{n-3}{2}\right).$$

不难看出，欲证明C_n'是愉快图，只需证明上述顶点标号l满足：

(a) 当$i\neq j$时，$l(x_i)\neq l(x_j)$；

(b) $\max\{l(x_i)\,|\,i=1,2,\cdots,n\}=\varepsilon(C_n')=n+1$；

(c) 当$(i,j)\neq(s,t)$时，$l'(x_ix_j)\neq l'(x_sx_t)$；

(d) $\max\{l'(x_ix_j)\,|\,1\leqslant i,j\leqslant n\}=\varepsilon(C_n')=n+1$.

*1981年8月12日收到。

式(a)易验证。因 l 是 $\{x_i|i=1,2,\cdots,n\}$ 到 $\{l(x_i)|i=1,2,\cdots,n\}=\{0,1,2,\cdots,\frac{n-5}{4},\frac{n+3}{4},\frac{n+3}{4}+1,\cdots,n+1\}$ 的一个一一映射，所以当 $i\neq j$ 时,$x_i\neq x_j$。从而当 $i\neq j$ 时,有 $l(x_i)\neq l(x_j)$。

式 (b) 从 $\max\{l(x_i)|i=1,2,\cdots,n\}=l(x_n)=n+1$ 即得。

式(c)、(i) 当 $1\leqslant i\leqslant\frac{n-5}{2}$时，若 i 为奇数，由 $n\equiv1\pmod 4$ 知$\frac{n-5}{2}$为偶数，故有 $1\leqslant i\leqslant\frac{n-7}{2}$。令$i=2k-1=2(k-1)+1$，则$i=1$ 时，$k=1$；$i=\frac{n-7}{2}$时，$k=\frac{n-5}{4}$。从而

$$l'(x_{i+1}x_i)=|l(x_{2k})-l(x_{2(k-1)+1})|=n-2k+1,\qquad\left(k=1,2,\cdots,\frac{n-5}{4}\right).$$

若 i 为偶数，则 $2\leqslant i\leqslant\frac{n-5}{2}$。令 $i=2k$，则当 $i=2$ 时，$k=1$；$i=\frac{n-5}{2}$时，$k=\frac{n-5}{4}$。从而

$$l'(x_{i+1}x_i)=|l(x_{2k+1})-l(x_{2k})|=n-2k,\qquad\left(k=1,2,\cdots,\frac{n-5}{4}\right).$$

故当 i 取遍 $\left\{1,2,\cdots,\frac{n-5}{2}\right\}$ 时，$l'(x_{i+1}x_i)$ 取遍 $\left\{\frac{n+5}{2},\frac{n+5}{2}+1,\cdots,n-1\right\}$。

(ii) 当$\frac{n-3}{2}\leqslant i\leqslant n-3$ 时，若 i 为奇数，由于 $n-3$ 为偶数，故 $\frac{n-3}{2}\leqslant i\leqslant n-4$。令 $i=2(k-1)+1$，则当 $i=\frac{n-3}{2}$时，$k=\frac{n-1}{4}$；当 $i=n-4$ 时，$k=\frac{n-3}{2}$。所以

$$l'(x_{i+1}x_i)=|l(x_{2k})-l(x_{2(k-1)+1})|=n-2k+1,\left(k=\frac{n-1}{4},\frac{n-1}{4}+1,\cdots,\frac{n-3}{2}\right).$$

若 i 为偶数，由于$\frac{n-3}{2}$为奇数，故$\frac{n-1}{2}\leqslant i\leqslant n-3$，令 $i=2k$，则当 $i=\frac{n-1}{2}$时，$k=\frac{n-1}{4}$；当 $i=n-3$ 时，$k=\frac{n-3}{2}$。所以

$$l'(x_{i+1}x_i)=|l(x_{2k+1})-l(x_{2k})|=n-2k,\left(k=\frac{n-1}{4},\frac{n-1}{4}+1,\cdots,\frac{n-3}{2}\right).$$

故当 i 取遍 $\left\{\frac{n-3}{2},\frac{n-3}{2}+1,\cdots,n-3\right\}$ 时，$l'(x_{i+1}x_i)$ 取遍 $\left\{2,3,\cdots,\frac{n+1}{2}\right\}$。

(iii) 由 l 的定义显然可得：$l'(x_{n-2}x_{n-1})=\frac{n+3}{2}$；$l'(x_nx_{n-1})=n+1$；$l'(x_{n-1}x_1)=n$；$l'(x_nx_1)=1$。

由(i)、(ii)、(iii)即可看出，当x_ix_j 取遍$E(C'_n)$时，$l'(x_ix_j)$ 取遍 $J=\left\{1;2,\cdots,\frac{n+1}{2};\frac{n+3}{2};\frac{n+5}{2},\cdots,n-1;n;n+1\right\}$，且 l' 是 $E(C'_n)$到 J 的一个一一映射。因而，当$(i,j)\neq(s,t)$ 时，$x_ix_j\neq x_sx_t$。从而当 $(i,j)\neq(s,t)$ 时，$l'(x_ix_j)\neq l'(x_sx_t)$。

(d) 从$\max\{l'(x_ix_j)|1\leqslant i,j\leqslant n\}=n+1$ 即得。

总之，C'_n 是一个愉快图。

引理 2 当 $n\equiv2\pmod 4$ 时，图 1 所示的图 C'_n 是愉快图。

证 定义顶点标号 l：

$$l(x_n)=n+1,\ l(x_{n-1})=0;\quad l(x_{2k+1})=n-k,\ \left(k=0,1,2,\cdots,\frac{n-4}{2}\right);$$

$$l(x_{2k})=k,\quad \left(k=1,2,\cdots,\frac{n-2}{4}\right);$$

$$l(x_{2k})=k+1,\ \left(k=\frac{n+2}{4},\ \frac{n+2}{4}+1,\cdots,\ \frac{n-2}{2}\right).$$

类似于引理1的证明，以上标号是愉快图的标号。

引理3 当 $n\equiv3\pmod 4$ 时，图1所示的图是愉快图。

证 定义顶点标号 l：

$$l(x_n)=1,\ l(x_{n-1})=0;\ l(x_{2k+1})=n-k+1,\ \left(k=0,1,2,\cdots,\frac{n-3}{2}\right);$$

$$l(x_{2k})=k+1,\quad \left(k=1,2,\cdots,\frac{n-7}{4}\right);$$

$$l(x_{2k})=k+2,\ \left(k=\frac{n-3}{4},\ \frac{n-3}{4}+1,\cdots,\ \frac{n-3}{2}\right).$$

以下证明类似于引理1，以上标号是愉快图标号。

引理4 当 $n\equiv0\pmod 4$ 时，图1所示的图 C'_n 是愉快图。

证 定义顶点标号 l：

$$l(x_n)=n+1,\quad l(x_{n-1})=0;\quad l(x_{2k})=n-k+1,\ \left(k=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}\right);$$

$$l(x_{2k+1})=k+1,\ \left(k=0,1,2,\cdots,\frac{n-8}{4}\right);$$

$$l(x_{2k+1})=k+2,\ \left(k=\frac{n-4}{4},\ \frac{n-4}{4}+1,\cdots,\ \frac{n-4}{2}\right).$$

以下的证明亦类似于引理1。

引理1～4中所定义的顶点标号如图2～5所示。

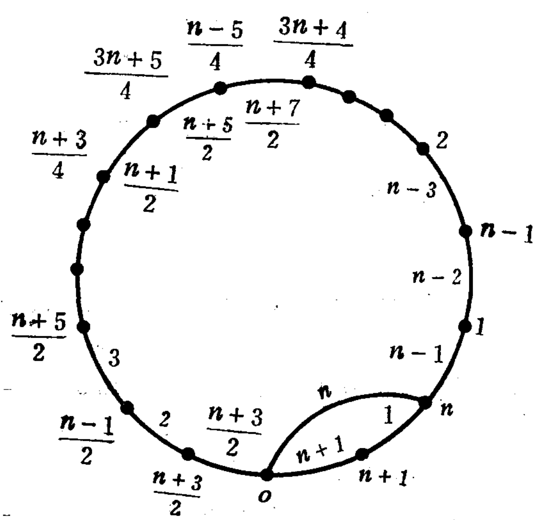

图2

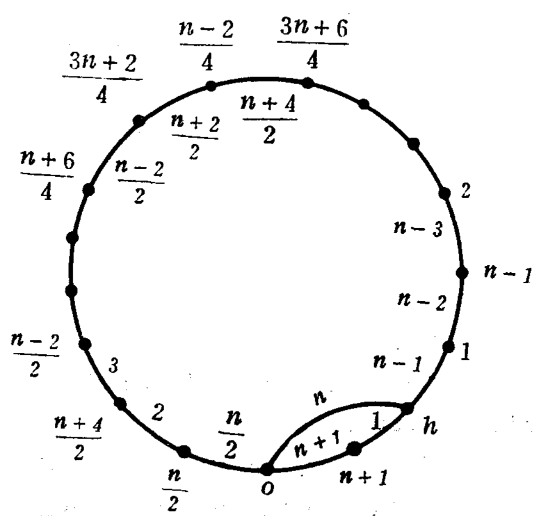

图3

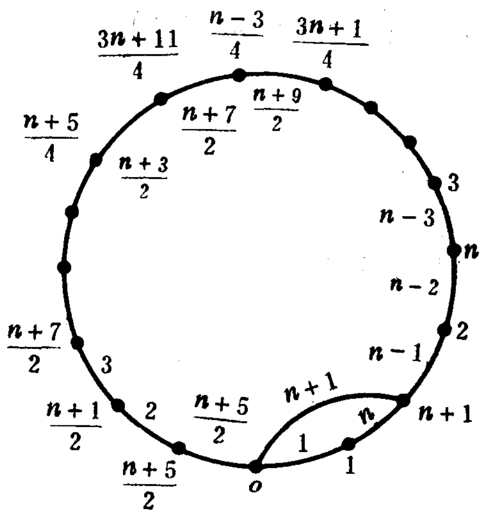

图4

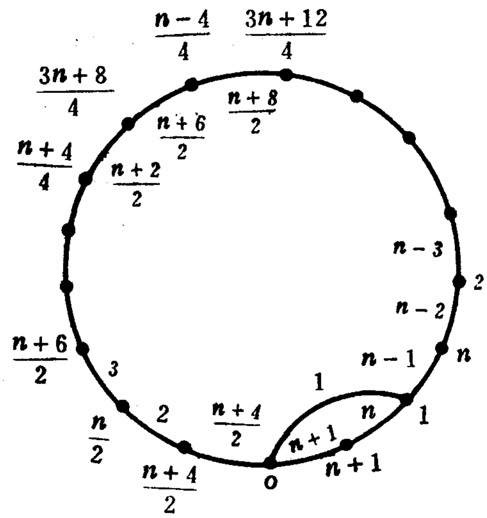

图5

由引理1～4便得到本文的主要结论：

定理 对含有n个顶点的圈C_n，总可以加上一条联接两个不相邻顶点的边，使所得的图C_n'是愉快图。

以上我们看到，对于含有n个顶点的圈C_n，我们总可以象图1那样增加一条边x_1x_{n-1}，使它是愉快的。最后指出，我们也可以象图6那样增加一条边x_2x_{n-1}，从而给出顶点的标号，使得它是愉快的。

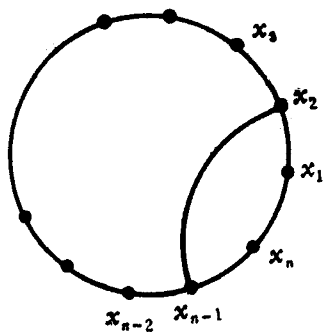

图6

参 考 文 献

[1] Bermond, J. C., Graceful graphs, raidio antennaae and French windmills, Graph Theory and Combinatorics, (ed. R. J. Wilson), in *Research Notes in Math.* 34, (1979) 18—37.

About the Bodendiek's Conjecture of Graceful Graph

Ma Ke-jie *Feng Cheng-jin*

Abstract

In 1977, H. Bodendiek, H. Schumach and H. Wegner proposed the following conjecture.

Conjecture. The graphs consisting of a cycle plus one edge joining two non-adjacent vertices are graceful.

In this paper, we have proved the following result.

It is Graceful Graph for any cycle C_n to be added one edge joining two non-adjacent vertices so we have C_n'.