第4卷 第4期
1 9 8 4年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

# 有关高阶奇异积分的 Bertrand-Poincaré 型换序公式*

路见可

（武汉大学）

内容提要：本文把关于 Cauchy 核奇异积分的 Bertrand-Poincaré 换序公式推广到高阶奇异积分的情况。主要结果见定理1至3，其中定理1已见于文献，但这里的表达方式和证法均是新的且较简。

1957年，C.Fox[1]将起源于 Hadamard 的实域中发散积分的有限部分概念（参见[2]）推广到高阶奇异积分。在[3]，[4]中我们曾作出关于它们的推广的留数定理以及一些应用。王传荣[5,6]曾给出有关它们的一些性质，并把著名的 Bertrand-Poincaré 积分换序公式[7]推广到这种高阶奇异积分上来。本短文将给出一些这种类型的换序公式，其中包括较简地重新表述和证明了[5]中的公式（见定理1）。

我们总假定 $L$ 是复平面中一封闭光滑曲线。$f(t,\tau)$ 是定义在 $L\times L$ 上的一函数，具有足够高阶的 Hölder 连续导数。

首先我们注意，对于 $L$ 上的任何两点 $t_0, t_1$（相同或否，下同），显然有

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-t_1}dt=\int_L\frac{dt}{t-t_1}\int_L\frac{f(t,\tau)}{\tau-t_0}d\tau. \tag{1}$$

由此立刻可得：对任何正整数 $m$，$n$，则有[6]

$$\int_L\frac{d\tau}{(\tau-t_0)^n}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-t_1)^m}dt=\int_L\frac{dt}{(t-t_0)^m}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(\tau-\tau_0)^n}d\tau. \tag{2}$$

此可由（1）式以及高阶奇异积分的定义

$$\int_L\frac{\varphi(t)}{(t-t_0)^n}dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_L\frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{t-t_0}dt,\quad \varphi^{(n-1)}(t)\in H,\quad t_0\in L \tag{3}$$

而得，因为（2）式相当于

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{\mathrm{D}_\tau^{n-1}\mathrm{D}_t^{m-1}f(t,\tau)}{t-t_1}dt=\int_L\frac{dt}{t-t_1}\int_L\frac{\mathrm{D}_\tau^{n-1}\mathrm{D}_t^{m-1}f(t,\tau)}{\tau-t_0}d\tau,$$

这里已用记号 $\mathrm{D}_\tau\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}$，$\mathrm{D}_t\equiv\frac{\partial}{\partial t}$。

*1982年4月18日收到。

**定理1** 设$m$, $n$为正整数，$t_0\in L$，则

$$\int_L\frac{d\tau}{(\tau-t_0)^n}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-\tau)^m}dt=-\frac{\pi^2}{(m-1)!\,(n-1)!}\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t_0,t_0)$$
$$+\int_L dt\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)^n(t-\tau)^m},\tag{4}$$

这里已用记号$\mathscr{D}\equiv D_t+D_\tau$。

**证** 用熟知的公式

$$D_t\int_L\frac{f(t,\tau)}{\tau-t}d\tau=\int_L\frac{\mathscr{D}f(t,\tau)}{\tau-t}d\tau$$

以及 Bertrand-Poincaré 公式，可以看到，（4）式左边等于

$$\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t,\tau)}{t-\tau}dt$$
$$=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\left[-\pi^2\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t_0,t_0)+\int_L dt\int_L\frac{\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t,\tau)}{(\tau-t_0)(t-\tau)}d\tau\right].$$

因此，为要证明（4）式，只须证明

$$\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\int_L dt\int_L\frac{\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t,\tau)}{(\tau-t_0)(t-\tau)}d\tau=\int_L dt\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)^n(t-\tau)^m}.\tag{5}$$

将此式左端写成

$$I_1-I_2=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t,\tau)}{\tau-t_0}d\tau$$
$$-\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{\mathscr{D}^{n-1}D_t^{m-1}f(t,\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

因为

$$\mathscr{D}^k=\sum_{r=0}^{k}C_r^kD_\tau^{k-r}D_t^r,\tag{6}$$

故由（3）式知，

$$I_1=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}C_r^{n-1}\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{D_\tau^{n-r-1}D_t^{m+r-1}f(t,\tau)}{\tau-t_0}d\tau$$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}C_{m-1}^{m+r-1}\int_L\frac{dt}{(t-t_0)^{m+r}}\int_L\frac{(ft,\tau)}{(\tau-t_0)^{n-r}}d\tau.$$

将求和指标$r$改为$n-r-1$，上式又可写为

$$I_1=\sum_{r=0}^{n-1}C_{m-1}^{m+n-r-2}\int_L\frac{dt}{(t-t_0)^{m+n-r-1}}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(\tau-t_0)^{r+1}}d\tau.$$

另一方面，又因

$$D_t^k=\sum_{r=0}^{k}(-1)^rC_r^k\mathscr{D}^{k-r}D_\tau^r,\ ^{1)}\tag{7}$$

1）注意，将$t$与$\tau$互换，（7）式也成立。

故由（3）式与（5）式，并作类似运算，可得

$$I_2=\frac{1}{(m-1)!(n-1)!}\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{\mathscr{D}^{m+n-r-2}D_t^r f(t,\tau)}{\tau-t}d\tau$$

$$=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_{n-1}^{m+n-r-2}\int_L\frac{dt}{(t-t_0)^{m+n-r-1}}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(\tau-t_0)^{r+1}}d\tau.$$

容易验证下一恒等式

$$\frac{1}{(\tau-t_0)^n(t-\tau)^m}=\sum_{r=0}^{n-1}C_{m-1}^{m+n-r-2}\frac{1}{(t-t_0)^{m+n-r-1}(\tau-t_0)^{r+1}}+\sum_{r=0}^{m-1}C_{n-1}^{m+n-r-2}\frac{1}{(t-t_0)^{m+n-r-1}(t-\tau)^{r+1}}. \tag{8}$$

将 $I_1$，$I_2$ 的表达式代入（5）式左边并利用恒等式（8），便得（5）式。证毕。

我们还给出下列不同类型的有关高阶奇异积分的换序公式。

**定理 2**　设 $t_0,t_1\in L$ 且 $n$ 为一正整数，则

$$\int_L\frac{d\tau}{(\tau-t_0)^n}\int_L\frac{f(t,\tau)dt}{(t-\tau)(t-t_1)}=\begin{cases}-\dfrac{\pi^2}{(t_1-t_0)^n}\left[f(t_1,t_1)-\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\mathscr{D}^r f(t_0,t_0)}{r!}(t_1-t_0)^r\right]\\ \quad+\displaystyle\int_L\frac{dt}{t-t_1}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)^n(t-\tau)},\ \text{当 } t_1\neq t_0 \text{ 时；}\\ -\dfrac{\pi^2}{n!}\mathscr{D}^n f(t_0,t_0)+\displaystyle\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)^n(t-\tau)},\\ \quad\text{当 } t_1=t_0 \text{ 时。}\end{cases} \tag{9}$$

**证**　先设 $t_1\neq t_0$。由（8）$(n=1)$，（5）以及 Bertrand-Poincaré 公式，（9）的左边等于

$$\int_L\left[\frac{1}{(t_1-t_0)^n(\tau-t_1)}-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(t_1-t_0)^{n-r}(\tau-t_0)^{r-1}}\right]d\tau\int_L f(t,\tau)\left(\frac{1}{t-\tau}-\frac{1}{t-t_1}\right)dt$$

$$=-\pi^2\left[\frac{f(t_1,t_1)}{(t_1-t_0)^n}-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(t_1-t_0)^{n-r}}\frac{1}{r!}\mathscr{D}^r f(t_0,t_0)\right]+\int_L\frac{dt}{t-t_1}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)^n(t-\tau)},$$

此即（9）的右边。

用同样的方法可证 $t_1=t_0$ 时（9）式成立。定理证毕。

对一足够光滑的函数 $F(t)$，我们将引进记号 $P_{n,a}(t;F)$ 表示该函数在 $t=a$ 处的 Taylor 展式的前 $n+1$ 项：

$$P_{n,a}(t;F)\equiv\sum_{r=0}^{n}\frac{F^{(r)}(a)}{r!}(t-a)^r, \tag{10}$$

而把其余项记为

$$R_{n,a}(t;F)=F(t)-P_{n,a}(t,F). \tag{11}$$

于是（9）式中，当 $t_1\neq t_0$ 时右边不带积分的项实际是

$$-\pi^2 R_{n-1,t_0}(t_1;f(t,t))/(t_1-t_0)^n.$$

由此立即看出，当 $t_1\to t_0$ 时，它正好趋于（9）式中当 $t_1=t_0$ 时的相应项。

**推论** $t_0,t_1,n$ 如上，则

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)dt}{(t-\tau)(t-t_1)^n}=\begin{cases}-\dfrac{\pi^2}{(t_0-t_1)^n}\left[f(t_0,t_0)-\sum\limits_{r=0}^{n-1}\dfrac{\mathscr{D}^r f(t_1,t_1)}{r!}(t_0-t_1)^r\right]\\ \quad+\displaystyle\int_L\frac{dt}{(t-t_1)^n}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(t-\tau)(\tau-t_0)}，\text{当 } t_1\neq t_0\text{时；}\\ -\dfrac{\pi^2}{n!}\mathscr{D}^n f(t_0,t_0)+\displaystyle\int_L\frac{dt}{(t-t_0)^n}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(t-\tau)(\tau-t_0)},\\ \qquad\text{当 } t_1=t_0\text{ 时。}\end{cases} \tag{12}$$

在（9）式中交换 $t_0,t_1$ 后即可得出（12）式。

**定理3** $t_0,t_1,n$ 仍如前，则

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)dt}{(t-\tau)^n(t-t_1)}=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{(t_1-t_0)^n}\left[\mathrm{P}_{n-1,t_0}(t_1;f(t,t_0))-\mathrm{P}_{n-1,t_1}(t_0;f(t_1,\tau))\right]\\ \quad+\displaystyle\int_L\frac{dt}{t-t_1}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)(t-\tau)^n}，\text{当} t_1\neq t_0\text{时；}\\ \dfrac{\pi^2}{n!}\left[(-1)^n D_\tau{}^n f(t_0,t_0)-D_t{}^n f(t_0,t_0)\right]\\ \quad+\displaystyle\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)d\tau}{(\tau-t_0)(t-\tau)^n}，\text{当 } t_1=t_0\text{时。}\end{cases} \tag{13}$$

**证** 先设 $t_1\neq t_0$。利用（8）式，可将（13)式左边写成

$$J_1-J_2=\int_L\frac{d\tau}{(\tau-t_0)(t_1-\tau)^n}\int_L\frac{f(t,\tau)}{t-t_1}dt-\sum_{r=0}^{n-1}\int_L\frac{d\tau}{(\tau-t_0)(t_1-\tau)^{n-r}}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-\tau)^{r+1}}dt.$$

由（2）式知，$J_1$ 中的累次积分可以交换积分次序。再利用（8）式以及定理1，可写

$$J_2=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(t_1-t_0)^{n-r}}\int_L\left[\frac{1}{\tau-t_0}-\sum_{s=0}^{n-r-1}\frac{(t_0-t_1)^s}{(\tau-t_1)^{s+1}}\right]d\tau\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-\tau)^{r+1}}dt$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(t_1-t_0)^{n-r}}\left\{\int_L\frac{d\tau}{\tau-t_0}\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-\tau)^{r+1}}dt-\sum_{s=0}^{n-r-1}(t_0-t_1)^s\int_L\frac{d\tau}{(\tau-t_1)^{s+1}}\right.$$

$$\left.\cdot\int_L\frac{f(t,\tau)}{(t-\tau)^{r+1}}dt\right\}=-\pi^2\sum_{r=0}^{n-1}\frac{D_t^r f(t_0,t_0)}{r!(t_1-t_0)^{n-r}}+\pi^2\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r!(t_1-t_0)^{n-r}}$$

$$\cdot\sum_{s=0}^{n-r-1}\frac{(t_0-t_1)^s}{s!}\mathscr{D}^s D_t^r f(t_1,t_1)+\cdots=-\frac{\pi^2}{(t_1-t_0)^n}(\mathrm{K}_1-\mathrm{K}_2)+\cdots,$$

其中未写出部分为 $J_2$ 中所含累次积分交换积分次序后的结果，而

$$\mathrm{K}_1 \equiv \sum_{r=0}^{n-1} \frac{D_t^r f(t_0,t_0)}{r!}(t_1-t_0)^r = P_{n-1,t_0}(t_1;\ f(t,t_0)),$$

$$\mathrm{K}_2 \equiv \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-r-1} \frac{(-1)^r (t_0-t_1)^{r+s}}{(r+s)!} C_r^{r+s} \mathscr{D}^s D_t^r f(t_1,t_1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k} \frac{(t_0-t_1)^k}{k!}(-1)^r C_r^k \mathscr{D}^{k-r} D_t^r f(t_1,t_1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_0-t_1)^k}{k!} D_\tau^k f(t_1,t_1) = P_{n-1,t_1}(t_0; f(t_1,\tau)).$$

于是（13）式得证。

再设 $t_1=t_0$。这时（13）式左边等于

$$(-1)^n \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t_0)^{n+1}} \int_L \frac{f(t,\tau)\,dt}{t-t_0} - \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t_0)^{n-r+1}} \int_L \frac{f(t,\tau)\,dt}{(t-\tau)^{r+1}},$$

其中第一项累次积分可交换积分次序，而后一项交换积分次序时，由定理 1，应添加下列和式：

$$\pi^2 \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!\,r!} \mathscr{D}^{n-r} D_t^r f(t_0,t_0)$$

$$= \frac{\pi^2}{n!}\left[\sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} C_r^n \mathscr{D}^{n-r} D_t^r f(t_0,t_0) - D_t^n f(t_0,\ t_0)\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{n!}[(-1)^n D_\tau^n f(t_0,t_0) - D_t^n f(t_0,t_0)].$$

因此（13）式成立。定理证毕。

在 $t_1 \neq t_0$ 时的（13）式中令 $t_1 \to t_0$ 时，也正好就是 $t_1 = t_0$ 时的（13）式。

当然我们还可考虑更一般的积分换序公式。例如，在定理 2 中把（9）式左边分母中的 $(t-t_1)$ 或 $(t-\tau)$ 分别换作 $(t-t_1)^m$ 或 $(t-\tau)^m$，利用（8）式，也可得到一些类似的但较复杂的公式，这里不赘。

## 参 考 文 献


[1] Fox C., A generalization of the Cauchy principal value, *Canadian J. of Math.* v. 9 (1957), No.1, 110—117.

[2] Schwartz L., Théorie des Distributions, T.1, 1950, *Strasbourg*.

[3] 路见可，高阶奇异积分及其在求解奇异积分方程中的应用，武大科技，1977，No.2，106—122.

[4] ——，推广的留数定理及其应用，武汉大学学报（自然科学版），1979，No.3，1—8.

[5] 王传荣，奇异极分 $\int_L \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{n+1}}d\tau$ 的 Hadamard 主值，数学年刊，V.3(1982)，No.2，195—202.

[6] ——，复二元函数高阶奇异积分的 Hadamard 主值，福州大学学报，1979，173—183.

[7] Гахов Ф. Д., Краевые Задачи, 3-ое изд, 1977, Москва.

# On Formulas of Bertrand-Poincaré Type Related to Singular Integrals of High Order

*Lu Jianke* (路见可)

(Wuhan University)

**Abstract**

In this note, the well-known Bertrand-Poincaré formula for changing order of integration related to singular intergrals with Cauchy kernel has been extended to some cases related to singular integrals of high ordcr. The main results are Theorem 1 to Theorem 3, in which Theorem 1 had already been obtained in literature[5] but both its statement and its proof used here are new and simpler.