第4卷 第4期　数学研究与评论　Vol.4 No.4
1984年10月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Oct. 1984

# 一类拟线性椭圆双曲耦合方程组的边值问题*

李惠川

（河南数学研究所）

应用上常常提出由不同类型的方程式耦合而成的方程组，其中许多是拟线性退缩方程组。本文考虑如下形式的耦合较强的（有未知函数的导数参加耦合）拟线性退缩方程组

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(u,t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial b_1^i(u,v,t,x)}{\partial x_i}+c_1(u,v,t,x)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial b_2^i(v,t,x)}{\partial x_i}+c_2(u,v,t,x)=0, \tag{2}$$

（重复指标表示从1到$n$求和，下同）其中$a^{ij}(u,t,x)$在$R^1\times\bar{Q}_T(Q_T=(0,T)\times\Omega,\Omega\subset R^n$为一有界域，其边界$\partial\Omega$适当光滑）上有界且满足一致椭圆性条件$a^{ij}(u,t,x)\xi_i\xi_j\geqslant\mu_0|\xi|^2$ $(\forall\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$，$\mu_0>0$为常数）。方程组（1）、（2）与文[1]中提到的渗流方程组有某些类似。

对方程组（1）、（2），我们研究它的这样一个初边值问题，初值和边值条件为

$$u|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

$$v|_{t=0}=0;\quad v|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0. \tag{4}$$

对初边值非齐的一般情形，我们可以通过未知函数的简单变换而化成齐初边值情形。

我们始终假定函数$b_1^i(u,v,t,x)$，$c_l(u,v,t,x)(l=1,2)$在$R^2\times\bar{Q}_T$上适当光滑且它们关于$u,v$的一阶偏导数在该域上有界；函数$b_2^i(v,t,x)$在$R^1\times\bar{Q}_T$上适当光滑且$b_{2v}^i(v,t,x)$，$b_{2x_iv}^i(v,t,x)$，$b_1^i(0,v,t,x)$，$c_1(0,v,t,x)$，$c_2(u,0,t,x)$在该域上有界；$c_{1u}(u,v,t,x)\leqslant-c_0$，这里$c_0>0$且满足不等式$c_0-\frac{3b_0^2}{2\mu_0}>0$ $(b_0=\max\limits_i\sup\limits_{R^2\times\bar{Q}_T}|b_{1u}^i(u,v,t,x)|)$。此外我们还假定方程(1)对任意给定的$v\in L^1(Q_T)$以及任意两个不$a.e.$相等的函数$u(t,x)$，$\tilde{u}(t,x)$ $(u(t,\cdot)$，$\tilde{u}(t,\cdot)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)a.e.$于$[0,T]$满足不等式

$$\int_\Omega\left\{\left(a^{ij}(u,t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}-a^{ij}(\tilde{u},t,x)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right)+(b_1^i(u,v,t,x)\right.$$

$$\left.-b_1^i(\tilde{u},v,t,x))\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right)+(c_1(u,v,t,x)-c_1(\tilde{u},v,t,x))(u-\tilde{u})\right\}dx>0. \tag{5}$$

**定义1** 有界可测函数$u(t,x)$，$v(t,x)$称为边值问题(1)—(4)在$Q_T$上的广义解，如果

i）对几乎所有的$t\in[0,T]$，作为$x$的函数$u(t,x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$，$v(t,x)\in BV(\Omega)$；

*1981年8月31日收到，推荐者：伍卓群（吉林大学）。

ii）对任意的$\eta(t,x)\in \mathring{W}_2^1(\Omega)a.e.$于$[0,T]$和任意非负的$\varphi(t,x)\in C_0^\infty((0,T)\times\bar{\Omega})$满足如下的积分恒等式和积分不等式（对所有的$k\in R^1$）

$$\int_\Omega\left[a^{ij}(u,t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+b_1^i(u,v,t,x)\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-c_1(u,v,t,x)\eta\right]dx=0,\tag{6}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\left\{|v-k|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{sgn}(v-k)\left[(b_2^i(v,t,x)-b_2^i(k,t,x))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-(b_{2x_i}^i(k,t,x)\right.\right.$$
$$\left.\left.+c_2(u,v,t,x))\varphi(t,x)\right]\right\}dxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\mathrm{sgn}(k)[b_2^i(rv,t,s)-b_2^i(k,t,s)]\nu_i\varphi dsdt$$
$$\geqslant 0,\tag{7}$$

式中$rv$为对固定的$t$，$v(t,x)$作为$x$的函数在边界$(0,T)\times\partial\Omega$上的迹，$\vec{n}\equiv(\nu_1,\cdots\nu_n)$为$\partial\Omega$上的单位外法向量。

iii）存在$[0,T]$中的一个零测度集$E_0$，使

$$\lim_{\substack{t\in[0,T]\setminus E_0\\ t\to 0}}\int_\Omega|v(t,x)|dx=0\tag{8}$$

记 $K_0=[\sup\limits_{R^1\times\bar{Q}_T}|c_2(u,0,t,x)|+\sup\limits_{\bar{Q}_T}|b_{2x_i}^i(0,t,x)|]\cdot\exp\{T[1+(\sup\limits_{R^2\times\bar{Q}_T}|c_{2v}(u,v,t,x)|$

$+\sup\limits_{R^1\times\bar{Q}_T}|b_{2x_iv}^i(v,t,x)|]\}$.

**定义2** 对任意给定的满足条件$\|v(t,x)\|_{L^1(Q_T)}\leqslant K_0\,\mathrm{mes}Q_T$的函数$v(t,x)$，函数$u(t,x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)a.e.$于$[0,T]$称为边值问题（1）、（3）在$Q_T$上的广义解，如果对任意的$\eta(t,x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)a.e.$于$[0,T]$满足等式（6）。

**定义3** 对任意给定的有界可测函数$u(t,x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)a.e.$于$[0,T]$，$\sup\limits_{0<t<T}\|u(t,\cdot)\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}<\infty$，我们称有界可测函数$v(t,x)$为边值问题（2），(4)在$Q_T$上的广义解，如果$v(t,\cdot)\in BV(\Omega)a.e.$于$[0,T]$且满足定义1中的积分不等式（7）和初值条件（8）。

下面叙述存在性定理并给出它的证明，证明中用到的三条引理的证明放在后面。

**定理** 边值问题（1）—（4）在$Q_T$上存在定义1意义下的广义解。

**证明** 用$\Lambda$表示$L^1(Q_T)$中满足$\|\tilde{v}(t,x)\|_{L^1(Q_T)}\leqslant k_0\,\mathrm{mes}\Omega$的函数所构成的集合。对任给的$\tilde{v}\in\Lambda$，由引理1，边值问题（1），（3）在$Q_T$上存在唯一广义解$u(t,x)$且（9）成立。将$u(t,x)$代入（2），由引理2知边值问题（2）、(4）在$Q_T$上存在唯一广义解$v(t,x)$且$|v(t,x)|\leqslant k_0$。今定义$\Lambda$上的算子$P$: $\tilde{v}(t,x)\to v(t,x)$。由引理3及Колмогоров定理易证$P$将$\Lambda$映入其自身且是$\Lambda$上的紧算子。于是由Schauder不动点定理知$P$在$\Lambda$中至少有一个不动点$v(t,x)$: $Pv=v$。设$u(t,x)$是对应于$v(t,x)$的边值问题（1），（3）在$Q_T$上的广义解，那么$u(t,x)$，$v(t,x)$便是边值问题（1）—（4）在$Q_T$上的广义解，证毕。

**引理1** 边值问题（1），（3）在$Q_T$上存在唯一广义解$u(t,x)$，且满足估计式

$$\sup_{\bar{Q}_T}|u(t,x)|+\sup_{0<t<T}\|u(t,\cdot)\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}\leqslant M_1,\tag{9}$$

其中常数$M_1$只依赖于$\mu_0$，$c_0$，$b_0$，$\mathrm{mes}\Omega$以及函数$|b_1^i(0,v,t,x)|$，$|c_1(0,v,t,x)|$在$R^1\times\bar{Q}_T$上的界。

**证明**　广义解的唯一性可直接由（5）推出。至于存在性和估计式（9），我们令

$$I(u,u)\equiv\int_\Omega a^{ij}(u,t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\int_\Omega\left(\int_0^1 b_{1u}^i(\lambda u,v,t,x)d\lambda\right)u\frac{\partial u}{\partial x_i}dx$$

$$-\int_\Omega\left(\int_0^1 c_{1u}(\lambda u,v,t,x)d\lambda\right)u^2dx+\int_\Omega b_1^i(0,v,t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx-\int_\Omega c_1(0,v,,t,x)udx.$$

注意到函数$\int_0^1 b_{1u}^i(\lambda u,v,t,x)d\lambda$，$\int_0^1 c_{1u}(\lambda u,v,t,x)d\lambda$的有界性，对上式应用带$\varepsilon$的 Cauchy 不等式得

$$I(u,u)\geqslant\alpha_0\|u(t,\cdot)\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}-M_2\left[\sum_{i=1}^n\|b_1^i(0,v(t,\cdot),t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\right.$$

$$\left.+\|c_1(0,v(t,\cdot),t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\right]\quad(M_2,\alpha_0>0\text{ 为常数}).\tag{10}$$

由（10）及前述的假设，对边值问题（1），（3）应用文[2]第四章定理9.1可知其在$\mathring{W}_2^1(\Omega)$中至少有一个广义解$u(t,x)$且$\sup\limits_{0<t<T}\|u(t,\cdot)\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}\leqslant M_3$（常数$M_3$只依赖于$\mu_0$，$c_0$及$|b_1^i(0,v,t,x)|$和$|c_1(0,v,t,x)|$的界）。由此和文[2]第四章定理7.1便知（9）成立，证毕。

**引理 2**　边值问题（2）、（4）在$Q_T$上存在定义 3 意义下的唯一广义解。

**证明**　令$u^\lambda(t,x)=\int_{R^{n+1}}j_\lambda(t-\tau,x-y)u(\tau,y)d\tau dy$（$j_\lambda(\cdot,\cdot)$为磨光核），在$Q_T$上考虑如下两个边值问题，

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial t}+\frac{\partial b_2^i(v^\lambda,t,x)}{\partial x_i}+c_2(u^\lambda,v^\lambda,t,x)=0,\quad v^\lambda|_{t=0}=v^\lambda|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0;\tag{11}$$

$$\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial t}+\frac{\partial b_2^i(v_\varepsilon^\lambda,t,x)}{\partial x_i}+c_2(u^\lambda,v_\varepsilon^\lambda,t,x)=\varepsilon\Delta v_\varepsilon^\lambda,\quad(\varepsilon>0,\ \Delta-\text{Laplace 算符}),\tag{12}$$

$$v_\varepsilon^\lambda|_{t=0}=v_\varepsilon^\lambda|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0.\tag{13}$$

由文[3]的结果知边值问题(12)，(13)在$Q_T$上存在唯一的具有界三阶导数的古典解$v_\varepsilon^\lambda(t,x)$且$\max\limits_{\bar{Q}_T}|v_\varepsilon^\lambda(t,x)|\leqslant k_0$（$k_0$与$\varepsilon$无关），再由文[4]的结果知对每个固定的$\lambda$，边值问题（11）在$Q_T$上存在唯一的广义解$v^\lambda(t,x)\in BV(Q_T)$且$|v^\lambda(t,x)|\leqslant k_0$ a.e. 于$Q_T$。

对$h>0$，令$\mathrm{sgn}_h(\tau)=1(\tau>h)$；$=\frac{\tau}{h}(|\tau|<h)$；$=-1(\tau<-h)$。设$I_h(\xi)=\int_0^{|\xi|}\mathrm{sgn}_h(\tau)d\tau$（$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$|\xi|=(\xi_i\xi_i)^{1/2}$），将(12)两端对$x_k$求导并乘以函数$\frac{\partial}{\partial\xi_k}(I_h(\xi))=\frac{\partial}{\partial\xi_k}(I_h(\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda))$，对$k$从 1 到$n$求和，在$Q_t=(0,t)\times\Omega$上积分并分部积分得

$$\int_0^t\frac{d}{dt}\int_\Omega I_h(\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda)dxdt=-\int_0^t\int_\Omega\varepsilon\frac{\partial^2 I_h(\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda)}{\partial\xi_k\partial\xi_j}\frac{\partial^2 v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_i\partial x_k}dxdt$$

$$-\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial b_{2v}^i(v_\varepsilon^\lambda,t,x)}{\partial x_i}[|\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda|\mathrm{sgn}_h(|\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda|)-I_h(\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda)]dxdt$$

$$-\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial c_2(u^\lambda,v_\varepsilon^\lambda,t,x)}{\partial x_k}+\frac{\partial b_{2x_k}^i(v_\varepsilon^\lambda,t,x)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_k}\frac{\mathrm{sgn}_h(|\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda|)}{|\mathrm{grad}_x v_\varepsilon^\lambda|}dxdt$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left\{\varepsilon\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(I_h\left(\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial\vec{n}}\vec{n}\right)\right)-b_{2v}^i(0,s,t)\nu_i I_h\left(\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial\vec{n}}\vec{n}\right)\right\}dsdt.\tag{14}$$

上式右端第一项非正；第二项随$h$趋于零，第三项可用$v^\lambda_{\varepsilon x_i}$和$u^\lambda_{x_i}$的$L^1$模来估计；第四项利用（12）及化局部坐标方法可知其当$h$趋于零时可由$M_4\left(1+\varepsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial v^\lambda_\varepsilon}{\partial\bar{n}}\right|dsdt\right)$来估计（$M_4$及下面的$M_l$都与$\lambda$和$\varepsilon$无关）。为估计这个边界积分把（12）改写为

$$\varepsilon\Delta v^\lambda_\varepsilon-\frac{\partial v^\lambda_\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial b^i_2(v^\lambda_\varepsilon,t,x)}{\partial x_i}+c_2(u^\lambda,v^\lambda_\varepsilon,t,x)\equiv f(t,x). \tag{15}$$

令$f^\pm(t,x)=\max\{\pm f(t,x),\ 0\}$（$f^\pm$Lip-连续），在$Q_T$上考虑如下边值问题：

$$\varepsilon\Delta v^\pm-\frac{\partial v^\pm}{\partial t}=f^\pm(t,x),\quad v^\pm|_{t=0}=v^\pm|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0. \tag{16}$$

显然，在$Q_T$上（16）之古典解$v^\pm(t,x)$非正，于是对每个$t\in[0,T]$有$\left.\frac{\partial v^\pm}{\partial\bar{n}}\right|_{(0,T)\times\partial\Omega}\geqslant0$。在$Q_t$上积分（16）得

$$\varepsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v^\pm}{\partial\bar{n}}dsdt-\int_\Omega v^\pm(t,x)dx=\int_0^t\int_\Omega f^\pm(t,x)dxdt, \tag{17}$$

因$v^+(t,x)-v^-(t,x)$满足方程(15)和齐初边值条件，所以$v^\lambda_\varepsilon(t,x)=v^+(t,x)-v^-(t,x)$，从而

$$\varepsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial v^\lambda_\varepsilon}{\partial\bar{n}}\right|dsdt=\varepsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial(v^+-v^-)}{\partial\bar{n}}\right|dsdt\leqslant\varepsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v^+}{\partial\bar{n}}+\frac{\partial v^-}{\partial\bar{n}}\right)dsdt. \tag{18}$$

容易证明$\left|\int_\Omega v^\pm(t,x)dx\right|$可以用$\int_0^t\int_\Omega f^\pm(t,x)dxdt$来估计，于是由（15），(17)和（18)便得要证的估计式

$$\varepsilon\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial v^\lambda}{\partial\bar{n}}\right|dsdt\leqslant M_5\left(1+\int_0^t\int_\Omega|\mathbf{grad}_xv^\lambda_\varepsilon|dxdt\right). \tag{19}$$

联合（14）与（19）后再应用 Gronwall 不等式可以推出

$$\||\mathbf{grad}_xv^\lambda_\varepsilon(t,\cdot)|\|_{L^1(\Omega)}\leqslant M_6\int_0^t\||\mathbf{grad}_xu^\lambda(t,\cdot)|\|_{L^1(\Omega)}dt. \tag{20}$$

因$v^\lambda_\varepsilon(t,x)\xrightarrow{L^1(Q_T)}v^\lambda(t,x)\ (\varepsilon\to0)$，所以由 Fubini 定理和（20）知对几乎所有的$t\in[0,T]$

$$\int_\Omega|v^\lambda(t,x+\Delta x)-v^\lambda(t,x)|dx\leqslant M_7|\Delta x|,\quad\forall\Delta x\in R^n. \tag{21}$$

设$v^{\lambda_i}(t,x)$是边值问题（11）在$Q_T$上对应于$u^{\lambda_i}(t,x)$的广义解（$i=1,2$；$\lambda_1\neq\lambda_2$），$E_0$为$[0,T]$中包含函数$\|v^{\lambda_1}(t,\cdot)-v^{\lambda_2}(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}$与$\|u^{\lambda_1}(t,\cdot)-u^{\lambda_2}(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}$的非 Lebesgue 点的零测度集。采用文[5]和[4]中证明唯一性的方法，对$t_1$，$t_2\bar{\in}E_0$可以推出不等式

$$\begin{aligned}\|v^{\lambda_1}(t_2,\cdot)-v^{\lambda_2}(t_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant&\|v^{\lambda_1}(t_1,\cdot)-v^{\lambda_2}(t_1,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}+M_7\int_{t_1}^{t_2}\{\|v^{\lambda_1}(t,\cdot)\\&-v^{\lambda_2}(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}+\|u^{\lambda_1}(t,\cdot)-u^{\lambda_2}(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\}dt\end{aligned} \tag{22}$$

在（22）中令$t_1\to0$（$t_1\bar{\in}E_0$），然后再应用 Gronwall 不等式得

$$\|v^{\lambda_1}(t_2,\cdot)-v^{\lambda_2}(t_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant M_8\int_0^{t_2}\|u^{\lambda_1}(t,\cdot)-u^{\lambda_2}(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}dt \tag{23}$$

于是$\|v^{\lambda_1}(t,x)-v^{\lambda_2}(t,x)\|_{L^1(Q_T)}\leqslant M_9\|u^{\lambda_1}(t,x)-u^{\lambda_2}(t,x)\|_{L^1(Q_T)}$。由此知$\{v^\lambda\}$当$\lambda\to0$时在$L^1(Q_T)$中收敛于某一函数$v(t,x)$且$\sup\limits_{\bar{Q}_T}|v(t,x)|\leqslant K_0$。注意到（21）还可推出

$$\int_{\Omega}|v(t,x+\Delta x)-v(t,x)|dx\leqslant M_{13}|\Delta x|\quad(\forall\Delta x\in R^n)\tag{24}$$

在$[0,T]$上$a.e.$成立。此即$v(t,\cdot)\in BV(\Omega)a.e.$于$[0,T]$。

由 $v^{\lambda}(t,x)\xrightarrow{L^1(Q_T)}v(t,x)(\lambda\to 0)$ 及 Fubini 定理知存在零测度子集 $E_0\subset[0,T]$和子列$\bar\lambda_k\to 0$，使得 $v^{\bar\lambda_k}(t,x)\to v(t,x)$ $a.e.$ 于 $\Omega(t\bar\in E_0)$。在不等式（23）中取 $\lambda_1=\bar\lambda_1$，$\lambda_2=\bar\lambda_k$ 并令 $k\to\infty$ 得

$$\|v^{\bar\lambda_1}(t_2,\cdot)-v(t_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant M_{11}\int_0^{t_2}\|u^{\bar\lambda_1}(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}dt\quad(t\bar\in E_0).$$

由此及不等式$\int_{\Omega}|v(t,x)|dx\leqslant\int_{\Omega}|v(t,x)-v^{\bar\lambda_1}(t,x)|dx+\int_{\Omega}|v^{\bar\lambda_1}(t,x)|dx$便知$v(t,x)$满足初值条件（8）。

用 $\mathrm{sgn}_h(v_\varepsilon^\lambda-k)\varphi$（$\varphi$ 如定义 1 所述）乘方程（12）两端并在 $Q_T$ 上积分，分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\Omega}\left\{\int_k^{v_\varepsilon^\lambda}\mathrm{sgn}_h(v-k)dv\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt+\int_0^T\int_{\Omega}\mathrm{sgn}_h(v_\varepsilon^\lambda-k)[b_2^i(v_\varepsilon^\lambda,t,x)-b_2^i(k,t,x)]\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt\\&\quad-\int_0^T\int_{\Omega}\mathrm{sgn}_h(v_\varepsilon^\lambda-k)\{b_{2x_i}^i(k,t,x)-c_2(u^\lambda,v_\varepsilon^\lambda,t,x)\}\varphi dxdt\\&\quad+\int_0^T\int_{\Omega}\{b_2^i(v_\varepsilon^\lambda,t,x)-b_2^i(k,t,x)\}\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_i}\mathrm{sgn}_h'(v_\varepsilon^\lambda-k)\varphi dxdt\\&\quad=\varepsilon\int_0^T\int_{\Omega}\mathrm{sgn}_h'(v_\varepsilon^\lambda-k)\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_i}\varphi dxdt+\varepsilon\int_0^t\int_{\Omega}\mathrm{sgn}_h(v_\varepsilon^\lambda-k)\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dxdt\\&\quad+\varepsilon\int_0^T\int_{\partial\Omega}\mathrm{sgn}_h(k)\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial\bar n}\varphi dsdt-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\mathrm{sgn}_h(k)(b_2^i(0,t,s)-b_2^i(k,t,s))\nu_i\varphi dsdt.\end{aligned}\tag{25}$$

依次令 $h$，$\varepsilon$ 和 $\lambda$ 趋于零，上式左端前三项各趋于（7）式前三项；第四项随 $h$ 趋于零；右端第一项非负，第二项随 $\varepsilon$ 趋于零，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial\bar n}\varphi dsdt\right\}$可仿照文[4]来估计，只须指出，在等式

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial\bar n}\varphi\rho_\delta dsdt\right\}=&-\int_0^T\int_{\Omega}\left\{v^\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t}+b_2^i(v^\lambda,t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-c_2(u^\lambda,v^\lambda,t,x)\varphi\right\}\rho_\delta dxdt\\&-\int_0^T\int_{\Omega}\varphi b_2^i(v^\lambda,t,x)\frac{\partial\rho_\delta}{\partial x_i}dxdt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi b_2^i(0,s,t)\nu_i dsdt^{*)}\end{aligned}\tag{26}$$

中，对右端取极限应先令 $\lambda\to 0$，再令 $\delta\to 0$ 可以推出

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v_\varepsilon^\lambda}{\partial\bar n}\varphi dsdt\right\}\right\}=\int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi\{b_2^i(0,t,s)-b_2^i(rv,t,s)\}\nu_i dsdt.\tag{27}$$

由（25）、（27）便知 $v(t,x)$ 满足（7）。解的唯一性可由（23）推出。证毕。

**引理 3**　边值问题（2）、（4）在定义 3 意义下的广义解 $v(t,x)$ 满足不等式

$$\int_{\Omega}|v(t,x+\Delta x)-v(t,x)|dx\leqslant k_1|\Delta x|,\quad\int_{\Omega}|v(t+\Delta t,x)-v(t,x)|dx\leqslant k_2|\Delta t|^{1/3},$$

其中常数 $k_1$、$k_2$ 只依赖于 $\sup\limits_{\bar Q_T}|u(t,x)|$ 与 $\sup\limits_{0<t<T}\|u(t,\cdot)\|_{\dot W_2^1(\Omega)}$。

**证明**　第一式已在引理2中得出，对函数 $v_\varepsilon^\lambda(t,x)$ 应用[5]的引理5。取极限即得第二式。

本文自始至终都是在伍卓群老师的指导下进行的，作者在此深表感谢。

*) $\rho_\delta$ 的定义见文[4]。

## 参 考 文 献

[1] Кружков, С. Н., Сукорянский, С. М., *МАТ. СБ.*, Т. 104, В. 1 (1977), 69—88.

[2] Ладыженская, О. А., Солонникор, В. А., Москra, Изу—Во, (1970).

[3] Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., *Amer. Math. Soc.*, Providence, Rhode Island (1968).

[4] Bardos, C., Leroux, A. Y., Nedelec, J. C., Comm. in P. D. E., Vol. 4 (1979), pp. 1017—1034.

[5] Кружков, С. Н., *МАТ. СБ.*, Т81, В. 2(1970), 228—255.


# Initial-Boundary Value Problem for a Class of Quasilinear Elliptic-Hyperbolic Coupled Systems

*Li Huichuan*


## Abstract

In the region $Q_T=(0,T)\times\Omega(\Omega\subset R^n$ is a bounded region with an appropriately smooth boundary $\partial\Omega)$ we consider the coupled system

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(u,t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial b^i(u,v,t,x)}{\partial x_i}+c_1(u,v,t,x)=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial b_2^i(v,t,x)}{\partial x_i}+c_2(u,v,t,x)=0, \qquad (2)$$

in which the copling is concerned with the first order derivatives of the unknown functions. The initial-boundary conditions are given by

$$u|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0, \qquad (3)$$

$$v|_{t=0}=v|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0. \qquad (4)$$

We assume that the equation (1) is strictly elliptic, i. e., the coefficients $a^{ij}(u,t,x)$ satisfy the condition $a^{ij}(u,t,x)\xi_i\xi_j\geqslant\mu_0|\xi|^2(\forall\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n)$, where $\mu_0>0$ is a constant.

We investigate the solvability of the initial-boundary value problem (1)—(4) in a class of all pairs of functions $(u,v)$ with $u(t,\cdot)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ a. e. on $[0,T]$ and $v(t,\cdot)\in BV(\Omega)$ a. e. on $[0,T]$. For any given $\tilde{v}\in L^1(Q_T)$, we first solve the boundary value problem (1), (3) for $u$. Then substituting $u$ to the equation (2) and solving the initial-boundary value problem (2), (4), we obtain a function $v$. Thus an operate $P$ from $L^1(Q_T)$ into itself is defined. Under certain assumptions on the coefficients of (1), (2), by means of the Schauder fixed point theorem we prove that $P$ has at least one fixed point in $L^1(Q_T)$. As a consequence, the existence of solutions of the problem (1)—(4) is established.