第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

关于F-环*

姚 学

(湖南大学基础科学系)

如果环R含有一有限非零元集X，使得任意非零aR与X相交不空，则称R为F-环。本文证明了：一个不含非零幂零元的F-环为有限个除环的直和。

我们推广傅昶林一文[1]中的概念如下：

定义 如果环R含有一有限非零元集X，使得任意非零aR与X相交不空，则称R为F-环。如果有一个这样的集合$X\subseteq Z(R)$，称R为FZ-环($Z(R)$表示R的中心)。

本文将证明：一个不含有非零幂零元素的F-环R为有限个除环的直和。以下R_l表示R的左零化子，$P(R)$表示R的质根，$J(R)$表示R的Jacobson根，$(0:A)$表示集合$\{x\in R \mid Ax=0\}$，这里$A\subseteq R$。

引理1 设R为一F-环。如果R是半质的或者至少含有一非右零因子元，则R含有极小右理想。

证 我们仅给出半质情形的证明。设$\{X_a\}$为满足F-环R定义的所有那种有限非零元集，其中$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$在$\{X_a\}$中元数最小，令$A_i=\bigcap\limits_{x_i\in aR} aR$，$1\leqslant i\leqslant n$，如果$A_i\cap A_j\neq 0$ $(i\neq j)$取：$0\neq y\in A_i\cap A_j$，则$X'=(X\setminus\{x_i,x_j\})\cup\{y\}\in\{X_a\}$而且$|X'|<|X|$，矛盾。所以

$$A_i\cap A_j=0 \quad (i\neq j). \tag{1}$$

又设R的非零右理想$A\subseteq A_i$，如果$0\neq a\in A$，则$aR\neq 0$，否则$R_l\neq 0$，导致$P(R)\neq 0$，于是存在$x_t\in aR$，从而$A_t\subseteq aR\subseteq A\subseteq A_i$，由(1)知$i=t$故$A_t=A=A_i$，$A_i$即为所求。进一步还可证明$A_i$即是$R$的全部极小右理想。因为若$B$是$R$的任一极小右理想，取$b\in R, bR\neq 0$，则存在$x_s\in X$使$x_s\in bR$，于是$A_s\subseteq bR\subseteq B$，$B=A_s$。

命题1 (i) 若F-环R为质环，则R为本原环。

(ii) 若F-环R为半质环，则R为Jacobson半单纯环。

证 (i) 根据引理1和[2]的定理5.28立即可得。

(ii) 设$J(R)\neq 0$，取$0\neq a\in J(R)$，则$aR\neq 0$，根据引理1的证明，存在极小右理想$A\subseteq aR$，因$P(R)=0$，$A^2\neq 0$。由[2]的引理7.11，存在幂等元e，使$A=eR$，故：$e\in aR\subseteq J(R)$，这和$J(R)$不含有非零幂等元的事实相矛盾。

* 1983年12月5日收到。

推论　半质的亚直既约F-环为本原环。

引理 2　半质的F-环R是环$R/(0:A_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$，的一个亚直和。

证　我们有$A_i=\bigcap\limits_{x_i\in aR}aR=e_iR=\bigcap\limits_{e_i\in aR}aR$，这里$e_i^2=e_i\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant n$，只需证明：$\bigcap\limits_{1\leq i\leq n}(0:A_i)=0$即可。设$0\neq a\in\bigcap\limits_{1\leq i\leq n}(0:A_i)$，则$e_ia=0$，$1\leqslant i\leqslant n$，又知，存在$r\in R$，使$ar=e_j$这里$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，从而$0=e_jar=e_j$，矛盾。

由[2]的定理5.27知：$R/(0:A_i)$皆为本原环，事实上，我们有：

命题 2　若R为半质的F-环，则$R/(0:A_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$，为亚直既约环。

证　设$\bar{A}$是$\bar{R}=R/(0:A_i)$的任一非零理想，取：$\bar{o}\neq\bar{a}\in\bar{A}$，则$e_iRa\neq 0$，存在$s\in R$，使$e_isa\neq 0$，从而有$r\in R$，使$e_isar=e_j$这里：$j\in\{1,\cdots,n\}$，故：$e_j\in e_iR\cap e_jR$，由此可知：$i=j$，$e_isar=e_i$所以$\bar{o}\neq\bar{e}_i\in\bar{A}$。

众所周知，在不含非零幂零元的环R中，幂等元为中心幂等元，于是，对于不含非零幂零元的F-环R，我们可以选到$X=\{e_1,\cdots,e_n\}$，$e_i^2=e_i\in Z(R)$，$1\leqslant i\leqslant n$。所以，不含非零幂零元的F-环为FZ-环。此外，$A_i=e_iR$为双边理想，$(0:A_i)=\{x\in R|e_ix=0\}$，当$i\neq j$时，$e_ie_j=0$。

我们现在可证：

定理　不含非零幂零元的F-环是有限个除环的直和。

证　首先，我们证明每个$R/(0:A_i)$为除环。对$\bar{R}=R/(0:A_i)$中任意$\bar{a}\neq\bar{o}$，$\bar{b}$我们有：$e_ia\neq 0$，存在$r\in R$，使$e_iar=e_j\neq 0$这里$j\in\{1,\cdots,n\}$，若$i\neq j$，则$0=e_je_iar=e_j^2=e_j$，矛盾。故：$e_iar=e_i$，$e_iarb=e_ib$得：$e_i(arb-b)=0$，在$\bar{R}$中即是：$\bar{a}\bar{r}\bar{b}=\bar{b}$，故$\bar{a}\bar{x}=\bar{b}$在$\bar{R}$中可解，$\bar{R}$为一除环。另外根据引理2有：$\bigcap\limits_{1\leq i\leq n}(0:A_i)=0$，再根据[2]的定理3.18即知$R$是除环$R/(0:A_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$，的直和。

作为[1]的定理1的推广，我们有：

推论　若亚直既约的F-环R不含非零幂零元素，则R为除环。

引理 3　半质的FZ-环不含非零幂零元素。

证　设$a^2=0$，$a\in R$，若$a\neq 0$，且$aR=0$，则$R_l\neq 0$，$P(R)\neq 0$，矛盾。若$a\neq 0$，且$aR\neq 0$，则存在$r\in R$，使得$ar=x_j\in X\subseteq Z(R)$，这里$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，于是$x_j^2=arx_j=ax_jr=a^2r^2=0$，故：$(x_jR)^2=0$，这仍与$P(R)=0$相矛盾。故$a=0$。

推论　半质的FZ-环为有限个除环的直和。

参　考　文　献

[1]　傅昶林，一些非交换亚直既约环，数学研究与评论，Vol. 3, No. 2, (1983), 17—22.

[2]　McCoy, N. H., The Theory of Rings Macmillan, New York, 1964.