第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

可换BCK代数的方程系统*

沈百英

（南京大学数学系）

一个可换BCK代数是满足下列六个条件的抽象代数$\langle X;*,0\rangle$[1]：

BK1 $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$ BK4 $0*x=0$

BK2 $(x*(x*y))*y=0$ BK5 $\alpha*\beta=0,\ \beta*\alpha=0,\ \vdash\alpha=\beta$

BK3 $x*x=0$ CK1 $x*(x*y)=y*(y*x)$。

可换BCK代数可纯用恒等式组成．到目前为止就笔者所知有下列几个方程系统．

（一）系统Ⅰ．是由Yutani[2]得到的．它包括下列六个恒等式：BK1，BK2，BK3，BK4 CK1以及 BK6 $x*0=x$。

（二）系统Ⅱ．仍由Yutani[3]得到．它包括下列四个恒等式：BK3，CK1，BK6以及 BK7 $(x*y)*z=(x*z)*y$。

（三）笔者最近从美国的“Math. Review”（1983年，83a：06017）中获悉，在文[4]中得到了一个由三个恒等式组成的系统，但由于文[4]在国内没有，而在“Math. Review”中亦未提及具体结果，故未知详情．

本文亦准备提出三个可换BCK代数的由三个恒等式组成的方程系统．

§1 系统CBK甲

系统CBK甲由下列三个恒等式组成：

BK1 $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$ CK1 $x*(x*y)=y*(y*x)$。

BK6 $x*0=x$

因此，系统CBK甲是在上述系统Ⅰ中删去BK2，BK3与BK4而得，也即BK2，BK3与BK4在系统Ⅰ中是多余的．

定理1 系统CBK甲是可换BCK代数的一个公理系统．

我们在系统CBK甲中依次证出BK2，BK3与BK4如下： BK2 $(x*(x*y))*y=0$

证 左$=\langle BK6\rangle((x*0)*(x*y))*(y*0)=\langle BK1\rangle 0$。 BK3 $x*x=0$

证 左$=\langle BK6\rangle(x*(x*0))*0=\langle BK2\rangle 0$。 BK4 $0*x=0$

证 $0*(0*x)=\langle CK1\rangle x*(x*0)=\langle BK6\rangle x*x=\langle BK3\rangle 0$, (1)

$$0*x=\langle(1)\rangle(0*(0*x))*x=\langle BK2\rangle 0.$$

到此定理1得证．

§2 系统CBK乙

系统CBK乙由下列三个恒等式组成：

BK4 $0*x=0$ CK2 $(x*y)*(x*z)=(z*y)*(z*x)$

BK6 $x*0=x$。

1983年11月7日收到．

定理 2 系统CBK乙是可换BCK代数的一个公理系统。

证 首先在系统CBK甲中证出CK2如下：

$$(x*y)*(x*z)=\langle \text{BCK性质}\rangle (x*(x*z))*y=\langle \text{CK1}\rangle (z*(z*x))*y$$
$$=\langle \text{BCK性质}\rangle (z*y)*(z*x).$$

其次在系统CBK乙中证出BK1与CK1如下：

$$(x*y)*x=\langle \text{BK6}\rangle (x*y)*(x*0)=\langle \text{CK2}\rangle (0*y)*(0*x)=\langle \text{BK4}\rangle 0*0=\langle \text{BK4}\rangle 0 \qquad (1)$$
$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=\langle \text{CK2}\rangle ((z*y)*(z*x))*(z*y)=\langle (1)\rangle 0.$$

此即BK1。

$$x*(x*y)=\langle \text{BK6}\rangle (x*0)*(x*y)=\langle \text{CK2}\rangle (y*0)*(y*x)=\langle \text{BK6}\rangle y*(y*x).$$

此即CK1。

到此定理2得证。

§3 系统CBK丙

系统CBK丙由下列三个恒等式组成：

$$\text{BK3}\quad x*x=0 \qquad \text{CK2}\quad (x*y)*(x*z)=(z*y)*(z*x).$$
$$\text{BK6}\quad x*0=x$$

定理 3 系统CBK丙是可换BCK代数的一个公理系统。

证 按定理2，只需在系统CBK丙中证出BK4即可。为此作如下推导：

$$0*x=\langle \text{BK3};\ \text{BK6}\rangle (x*x)*(x*0)=\langle \text{CK2}\rangle (0*x)*(0*x)=\langle \text{BK3}\rangle 0.$$

于是定理3得证。

参考文献

[1] Iséki, K. and Tanaka, S., An introduction to the theory of BCK-algebras, *Math, Japon.*, 23 (1978), 1—26.

[2] Yutani, H., The class of commutative BCK-algebras is eguationally definable, *Math. Sem. Notes of the Kobe Univ.*, Vol.5 (1977), 207—210.

[3] Yutani, H., On a system of axioms of a commutative BCK-algebra, *Math. Sem. Notes of the Kobe Univ.*, 5 (1977), 255—256.

[4] Patasinski, M. and Wozniakowska, B., An equational basis for commutative BCK-algebras, Bulletin of the section of logic, *Polish Academy of sciences*, 10 (1981), 108—112.

The Equational Systems of Commutative BCK-algebra

Shen Baiying

(Nanjing University)

Abstract

In this paper we give three equational systems of commutative BCK-algebra. The first system CBK I consists of the following three identities:

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0,\quad x*0=x,\quad x*(x*y)=y*(y*x).$$

The second system CBK II consists of the following three identities:

$$0*x=0,\quad x*0=x,\quad (x*y)*(x*z)=(z*y)*(z*x).$$

The third system CBK III consists of the following three identities:

$$x*x=0,\quad x*0=x,\quad (x*y)*(x*z)=(z*y)*(z*x).$$