第4卷 第4期 数学研究与评论 Vol.4 No.4
1984年10月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Oct. 1984

(0,1)-矩阵类 $\mathfrak{A}(R,S)$*

展 涛

（山东大学数学系）

我们把元素全部是1或0的矩阵称为(0,1)-矩阵。设A是一个$m\times n$阶(0,1)-矩阵，其第i行全部元素之和为$r_i(1\leqslant i\leqslant m)$，第$j$列全部元素之和为$s_j(1\leqslant j\leqslant n)$。那么称向量$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$为$A$的行和向量；$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$为$A$的列和向量。所谓具有行和向量$R$，列和向量$S$的(0,1)-矩阵类$\mathfrak{A}(R,S)$是指：

$$\text{集 } \mathfrak{A}(R,S)=\left\{ m\times n\text{阶}(0,1)\text{矩阵}A=(a_{ij})\ \middle|\ \begin{array}{l}(\sum_j a_{1j},\sum_j a_{2j},\cdots,\sum_j a_{mj})=R\\ (\sum_i a_{i1},\sum_i a_{i2},\cdots,\sum_i a_{in})=S\end{array}\right\}$$

用$|\mathfrak{A}(R,S)|$表示其中所含不同矩阵的个数。

Ryser及Gale[1]首先研究了$\mathfrak{A}(R,S)$的性质，他们都得到了$\mathfrak{A}(R,S)$非空的充要条件，魏万迪[2]给出了关于$|\mathfrak{A}(R,S)|$的一个下界估计式。本文对$\mathfrak{A}(R,S)$的性质进行了进一步讨论：得到了$|\mathfrak{A}(R,S)|$的比较定理，给出了估计$|\mathfrak{A}(R,S)|$上、下界的一个新方法，并且对维数较低的R或S，这种方法也可直接得到$|\mathfrak{A}(R,S)|$的数值。

为了便于叙述我们的结果，先给出一些定义和约定。

本文所涉及的向量均指分量为非负整数的向量，且不失一般性，假定它们的分量按递减次序排列。具有行和向量的R的(0,1)-矩阵$\bar{A}$，若每行元素都是递减排列的，则称$\bar{A}$为具有行和向量R的极左矩阵，它的列和向量$\bar{S}$（显然由R唯一确定）称为R的极左列向量。

若向量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$和$S^*=(s_1^*,s_2^*,\cdots,s_n^*)$满足条件：$\sum_{i=1}^{k}S_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}S_i^*$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，$\sum_{i=1}^{n}S_i=\sum_{i=1}^{n}S_i^*$，则称$S^*$优于$S$，记为$S^*\succ S$，或：$S\prec S^*$。

定理1 （Ryser, Gale[1]） $\mathfrak{A}(R,S)$非空之充要条件为：$\bar{S}\succ S$，这里$\bar{S}$是R的极左列向量。

从定理1出发我们得到：

定理2 设$\mathfrak{A}(R,S)$非空，那么$\mathfrak{A}(R,S)$中矩阵的第l列之所有不同排列方法的个数为：

$$\sum_{(E_l)}\binom{\bar{s}_1-\bar{s}_2}{k_1}\binom{\bar{s}_2-\bar{s}_3}{k_2}\cdots\binom{\bar{s}_{n-1}-\bar{s}_n}{k_{n-1}}$$

* 1983年5月20日收到。

其中：$(E_l)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{t} k_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{t} s_i - \sum\limits_{i=2}^{t+1} \bar{s}_i, & 1 \leqslant t \leqslant l-1. \\ \sum\limits_{i=1}^{t} k_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{t+1} s_i - \sum\limits_{i=2}^{t+1} \bar{s}_i - s_l, & l \leqslant t \leqslant n-2. \\ k_1 + \cdots + k_{n-1} = \bar{s}_1 - s_l & k_i \geqslant 0. \end{cases}$

我们称对应于$(k_1, \cdots, k_{n-1})$的排列为由$(k_1, \cdots, k_{n-1})$确定的第 l 列的一个可行排列。

利用定理 2（取 $l=1$）可以得到下面的递推公式：

定理3 设 $\mathfrak{A}(R,S)$非空，则：

$$|\mathfrak{A}(R,S)| = \sum_{(E_1)} \left\{ \binom{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}{k_1} \binom{\bar{s}_2 - \bar{s}_3}{k_2} \cdots \binom{\bar{s}_{n-1} - \bar{s}_n}{k_{n-1}} |\mathfrak{A}(R',S')| \right\}$$

这里 $S' = (s_2, s_3, \cdots, s_n), R' = R - R_0$，$R_0$ 是由$(k_1, \cdots, k_{n-1})$确定的可行排列向量。

对于维数较低的 R 或 S，上述公式可使我们计算出$|\mathfrak{A}(R,S)|$之数值。

若在定理 3 中，取一组特殊的$k_1, \cdots, k_{n-1}$满足(E_1)，可以得到$|\mathfrak{A}(R,S)|$的下界估计。如我们有：

定理4 设$\mathfrak{A}(R,S)$非空，则：

$$|\mathfrak{A}(R,S)| \geqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta(S_i, R^{(i)}) \geqslant 1.$$

这里 $\Delta(S_j, R) = \binom{\bar{s}_{m(S_j,R)} - \bar{s}_{m(S_j,R)-1}}{s_j - \bar{s}_{m(S_j,R)+1}}, m(S_j, R) = r_{S_j}$而$R^{(i)}$则是$R^{(i-1)}$减去$\mathfrak{A}(R^{(i-1)}, S^{(i-1)})$中第一列之标准排列列向量。$R^{(1)} = R, S^{(i)} = (s_i, s_{i+1}, \cdots s_n)$。

$\mathfrak{A}(R,S)$第一列之标准排列是指由：$k_1^0 = \bar{s}_1 - \bar{s}_2$，$k_2^0 = \bar{s}_2 - \bar{s}_3, \cdots, k^0_{m(S_1,R)-1} = \bar{s}_{m(S_1,R)-1} - \bar{s}_{m(S_1,R)}$，$k^0_{m(S_1,R)} = \bar{s}_{m(S_1,R)} - s_1 \geqslant 0$，$k^0_{m(S_1,R)+1} = \cdots = k^0_{n-1} = 0$ 所确定的可行排列。

若我们从第 l 列开始，同样取一些特殊的$k_1, \cdots, k_{n-1}$，则可得：

定理5（魏万迪）[2] $|\mathfrak{A}(R,S)| \geqslant \prod\limits_{0 \leqslant i \leqslant t} \omega(s, s^{(i)}) \geqslant 1$.这里假设 $\mathfrak{A}(R,S)$非空，$\omega(s, s^{(i)})$含义见魏万迪[2]。

有例子说明定理 4 、 5 的结论是互不包含的，但若在定理 3 中，将这两个结果用于估计$|\mathfrak{A}(R',S')|$，那么显然是比定理 4 、 5 的结论更精确的估计。

仍从定理 2 出发，可建立起下列比较定理：

定理6 若 $S' \prec S$，$R' \prec R$，则：$|\mathfrak{A}(R',S')| \geqslant |\mathfrak{A}(R,S)|$.

记 $\mathfrak{A}(R,S) \succ \mathfrak{A}(R',S')$，如果$R \succ R'$，$S \succ S'$。显然这是在$\{\mathfrak{A}(R,S)\}$中引入的一种偏序关系，凡具有这种关系的$\mathfrak{A}(R,S)$，可比较其$|\mathfrak{A}(R,S)|$的大小，一般情形虽无定论，但可以证明：在关系“$\succ$”下的上、下确界是存在的，这样就可给出这些$|\mathfrak{A}(R,S)|$的一个上、下界估计。

利用定理 6 可以得到$|\mathfrak{A}(R,S)|$的一个上界估计：

定理7 $|\mathfrak{A}(R,S)| \leqslant l(R,S) |\mathfrak{A}(R^{(2)}, S^{(2)})|$

这里 $l(R,S)$ 表示 $\mathfrak{A}(R,S)$ 中第一列可行排列数，$R^{(2)}$ 为 R 减去第一列标准排列列向

量所得向量，$S^{(2)}=(s_2,\cdots,s_n)$。据此可得$|\mathfrak{A}(R,S)|$一上界估计。

例1　$R=(5,4,4,3,2,1)$。$S=(6,3,3,3,2,2)$。由定理 3：$|\mathfrak{A}(R,S)|=444$，但由定理 4 仅可得：$|\mathfrak{A}(R,S)|\geqslant 54$，由定理 5：$|\mathfrak{A}(R,S)|\geqslant 30$。

例2　$R=(7,5,5,4,4,3,2,2,1)$

$S=(7,6,4,4,4,4,4)$。

由定理 5：$|\mathfrak{A}(R,S)|\geqslant 12600$，由定理 4：$|\mathfrak{A}(R,S)|\geqslant 20160$，结合定理 3 及定理 4：$|\mathfrak{A}(R,S)|\geqslant 71840$。

作者感谢楼世拓，方祖耀老师指导。

参　考　文　献

[1]　Gale, A theorems on flows in netwosks, *Pacific I. Math.*, 1959.

[2]　魏万迪，(0，1)-矩阵类 $\mathfrak{A}$ (R，S)，科学通报，数理化专辑，1980年第一集。