第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

双拓扑群*

高云鹏

（哈尔滨师范大学）

由J.C. Kelley首创的双拓扑空间理论七十年代中期以来得到迅速发展。在此背景下，本文建立双拓扑群概念，以拓广拓扑群的研究。

定义 设$(X,\cdot)$为群，$(X,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑空间。$(X,\cdot,\mathscr{P})$关于$\mathscr{Q}$为拓扑群系指函数$f(x,y)=xy^{-1}$视为$f:(X,\mathscr{P})\times(X,\mathscr{Q})\to(X,\mathscr{P})$是连续的，平行地可定义$(X,\mathscr{Q})$关于$\mathscr{P}$为拓扑群。若上述两者皆成立，则称$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群。

这样，$(X,\cdot,\mathscr{P})$为拓扑群等价于$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{P})$为双拓扑群。显见双拓扑群概念是拓扑群概念的自然拓广，而且有趣的是，一个双拓扑群一经建立就立刻派生出两个拓扑群。

定理 1 设$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群，记$\mathscr{T}=\mathscr{P}\vee\mathscr{Q}$，$\tau=\mathscr{P}\wedge\mathscr{T}$，则$(X,\cdot,\mathscr{T})$与$(X\cdot,\tau)$皆为拓扑群。

下述定理使双拓扑群的函数特征更显明。

定理 2 $(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群的充要条件为函数$i(x)=x^{-1}$视为$i:(X,\mathscr{P})\to(X,\mathscr{Q})$或$i:(X,\mathscr{Q})\to(X,\mathscr{P})$皆连续；同时，函数$m(x,y)=xy$视为$m:(X,\mathscr{P})\times(X,\mathscr{P})\to(X,\mathscr{P})$或$m:(X,\mathscr{Q})\times(X,\mathscr{Q})\to(X,\mathscr{Q})$皆连续。

依此易证：函数$i(x)=x^{-1}$及群上的左、右平移这时都成为同胚映射。本文由此出发刻画了关于拓扑$\mathscr{P}$、$\mathscr{Q}$的开集、邻域、内核、闭集、闭包等基本拓扑概念的具体表达形式，它们也反映了构造双拓扑群的两个拓扑之间的内在联系。例如 a) 设$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群，$A\subseteq X$，则

$$\bar{A}_{\mathscr{P}}=\bigcap\{U\cdot A:U\in N_{\mathscr{Q}}(e)\}=\bigcap\{A\cdot U:U\in N_{\mathscr{Q}}(e)\},$$

$$\bar{A}_{\mathscr{Q}}=\bigcap\{U\cdot A:U\in N_{\mathscr{P}}(e)\}=\bigcap\{A\cdot U:U\in N_{\mathscr{P}}(e)\}.$$

这里，e为群X的单位。

b) 设$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群，$A\subseteq X$，$p$与$q$分别是关于拓扑$\mathscr{P}$与$\mathscr{Q}$的内核算子，则

$$A^p=\{x\in X:\text{存在}\ U\in N_{\mathscr{P}}(e),\ \text{使}\ x\cdot U\subseteq A\ \text{或}\ U\cdot x\subseteq A\}$$

$$A^q=\{x\in X:\text{存在}\ U\in N_{\mathscr{Q}}(e),\ \text{使}\ x\cdot U\subseteq A\ \text{或}\ U\cdot x\subseteq A\}$$

且 $(A^p)^{-1}=(A^{-1})^q$，$(A^{-1})^p=(A^q)^{-1}$.

* 1982年4月22日收到。

在上述论说的基础上，设$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群，记$\mathscr{U}=N_{\mathscr{P}}(e)$，$\mathscr{V}=N_{\mathscr{Q}}(e)$，可验证：

Ⅰ 任取$U\in\mathscr{U}$，$V\in\mathscr{V}$，有$U\cap V\neq\emptyset$，且存在$U_1\in\mathscr{U}$，$V_1\in\mathscr{V}$，使$U_1^{-1}\subseteq V$，$V_1^{-1}\subseteq U$。

Ⅱ 任取$U\in\mathscr{U}$，存在$U_1\in\mathscr{U}$，使$U_1\cdot U_1\subseteq U$。

Ⅲ 任取$U\in\mathscr{U}$，$x\in X$，有$x\cdot U\cdot x^{-1}\in\mathscr{U}$。

Ⅳ 若U_1，$U_2\in\mathscr{U}$，则$U_1\cap U_2\in\mathscr{U}$。

Ⅴ 若$U\in\mathscr{U}$且$U\subseteq U_1$，则$U_1\in\mathscr{U}$。

对Ⅱ—Ⅴ四条性质，关于$\mathscr{V}$有平行的结果。

定理 3 设$(X,\cdot)$为群，$\mathscr{U}$、$\mathscr{V}$为满足性质Ⅰ—Ⅴ的X的子集的非空族，则可唯一引入X的拓扑$\mathscr{P}$、$\mathscr{Q}$，使$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群，且$\mathscr{U}=N_{\mathscr{P}}(e)$，$\mathscr{V}=N_{\mathscr{Q}}(e)$。

双拓扑群由它的单位邻域系所决定这一事实使许多拓扑概念得以局部化，称为双拓扑群的奇次性。借此及前述闭包表达式易证

定理 4 双拓扑群是配正则的双拓扑空间。

一个配正则的双拓扑空间甚至可以不是配T_0的，令人欣慰的是我们有如下

定理 5 若双拓扑群为配T_0的双拓扑空间，则其必为配**Hausdorff**空间。

由定义直接可得，具有相对拓扑的双拓扑群的子群是双拓扑群。在这方面有研究价值的是如下一个特殊子群。设$(X,\cdot,\mathscr{P},\mathscr{Q})$为双拓扑群，$X^*$为$X$任意的一个代数子群，结果由以下三个定理组成。

定理 6 $\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}$为$X$的子群。特别，若$X^*$是正规的，，则它也是正规的。

定理 7 若$X^{*p}\neq\emptyset$，则X^*关于拓扑$\mathscr{P}$既开且闭。关于算子q有平行的结果。

由此定理，$X^{*p}\neq\emptyset$与$X^{*q}\neq\emptyset$只要其一成立，则$\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}-X^*=\emptyset$。

定理 8 若$\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}-X^*\neq\emptyset$，则$\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}=\overline{(\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}-X^*)}_{\mathscr{P}}\cap\overline{(\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}-X^*)}_{\mathscr{Q}}$

当然有，$\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}-X^*$在$\overline{X^*_{\mathscr{P}}}\cap\overline{X^*_{\mathscr{Q}}}$中关于拓扑$\mathscr{P}$、$\mathscr{Q}$皆是稠密的。

众所周知，对于实数集，除经常使用**Euclidean**拓扑外，在研究函数半连续性时要使用它的上拓扑与下拓扑，而它的两个半开区间拓扑也具有一些美妙的性质。可证明，对于实数加群，这两对拓扑可用以构造出两个双拓扑群。但遗憾的是，上述四个拓扑各自都不能用以构造拓扑群。这一事实说明双拓扑群的引入确实开拓了拓扑群的研究。

本文承我的老师傅沛仁副教授亲切指导，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] 蒲保明，双拓扑空间，四川大学第六次科学讨论会资料(数学分册)，(1978)。

[2] Л.С. 邦德列雅金，连续群，中译本，科学出版社。(1978)。