第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

到每个二维子空间均无范数为1的投影的三维Banach空间*

许汪涛

（咸阳师专数学系）

本文欲解决的问题是：每一个三维（或更高维）的Banach空间X，是否至少存在一个二维子空间M，从X到M上存在一个范数为1的投影呢？

回答是否定的。

在实的三维欧氏坐标空间E中，取一个绝对凸、吸收的有界闭集G，定义E上一个实值函数$\|\cdot\|$如下：

$\forall x\in E$，令 $$\|x\|=\inf\{\lambda\mid\lambda>0,x\in\lambda G\},$$

则 $X=(E,\|\cdot\|)$是Banach空间，G是它的单位球。

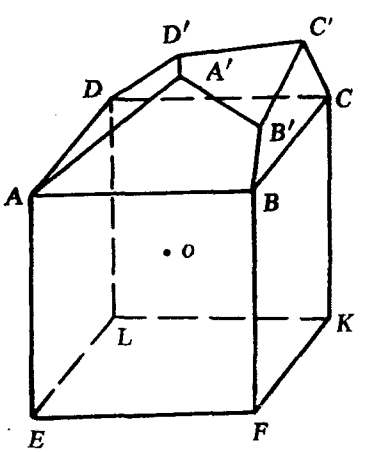
为避免含混，约定平面M“穿过”多面体G的面（或棱）Π，是指M经过Π的内点但M不包含Π，而“通过”Π即指$M\supset\Pi$。

引理 设G是E中关于原点O对称的封闭的凸多面体，X是如上定义的三维实Banach空间。如果二维子空间M穿过G的三个这样的面：它们所在的平面的交线互不平行。则X到M上不存在范数为1的投影。

证明是比较显然的，这里从略。

定理 存在三维Banach空间，对于它的每一个二维子空间M，都不存在X到M上的范数为1的投影。

证明 在实的三维欧氏坐标空间E中，取一个中心在原点O的正方体G。在G的各个面上分别加上一个类似四棱台的多面体（简称类四棱台；图中只画出了一个），得到一个新的多面体G'。在添加类四棱台时要求：



（1）每个类四棱台的侧面与下底面所成之角小于45°；

（2）G的对称面上所加的两个类四棱台关于O点对称；

（3）G的对角平面穿过它所垂直的面上所加的类四棱台的上底面；

（4）G'的任何一个面（四边形）的每双对边不平行；

* 1983年4月20日收到。

(5) 类四棱台的每一侧棱不在G的任一对角平面上；

(6) 两个非对称的类四棱台，在它们的上底各任取一棱，它们不同在通过O的一个平面上。

不难验证，上述要求可以同时得到满足。

于是得到的G'是一个关于O点对称的封闭的凸多面体。由前述知它是某个三维Banach空间X的单位球。

设M是通过O点的任一个平面。

(I) 如果M通过G的一条棱，由(3)，M穿过某个类四棱台的上底面；由(5)知它还穿过该类四棱台的两个侧面。由(4)知，这三个面满足引理的要求。

(II) 如果M穿过G的某一条棱，例如AB时，则M穿过G'的以AB为公共边的两个面。由于(6)，M或者穿过$BCC'B'$、$ADD'A'$、$A'B'C'D'$中的一个，或者穿过$ABFE$上类四棱台的相应三个面中的一个。同样由(4)知，M穿过的这三个面满足引理的要求。

于是由引理便得到我们所要的结果。证毕。

本文是在陈德璜、王曾贻两位教授的指导下完成的，并得到吴从炘教授的审阅和支持。在此对他们深表谢意。

参考文献

[1] Diestel, J., Geometry of Banach Spaces-Selected Topies, Lecture Notes in Math., Vol. 485 (1975).

[2] James, R. C., Orthogonality and Linear Functional in Normed Linear Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 61 (1947), pp. 265-292.

[3] Robertson, A. P. and Roberston, W. J., Topological Vector Spaces.

A 3-Dimensional Banach Space which has no Projection with Norm 1 onto any 2-Dimensional Subspace

Xu Wantao

(Xianyan Teacher's College)

Theorem. There exists a 3-dimensional Banach space X which has no projection with norm 1 from X onto M, where M is an arbitrary 2-dimensional subspace of X.