第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

关于 Schur 空间的若干结果*

徐洪坤

(浙江大学)

本文在文[1]的基础上对 Schur 空间进行了若干讨论，并得到了一些结果。

定义：设 E 是 Banach 空间，称 E 为 Schur 空间或称 E 具有 Schur 性质，如果 E 中序列的弱收敛与强收敛等价。

空间 l^1 是 Schur 空间。

命题1 Schur 空间是 w 序列完备的。

证明：见 [1,推论1.8]。

命题2 Schur 性质在线性同胚之下不变。

证明 设 E 是 Schur 空间，F 是 Banach 空间，且有线性同胚 T：$E\to F$。若序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F$ 使得 $y_n\xrightarrow{W}y\in F$，由于共轭映象 T^*：$F^*\to E^*$ 是线性同胚，故必有 $T^{-1}y_n\xrightarrow{W}T^{-1}y$。因 E 是 Schur 空间，得 $\|T^{-1}y_n-T^{-1}y\|\to 0$，$\|y_n-y\|\to 0$。所以 F 是 Schur 空间。

命题3 有限个 Schur 空间的乘积空间是 Schur 空间。

证明 由 Schur 空间的定义即知。

定理1 若 E 是 Banach 空间，则以下各条等价：

(1) E 是 Schur 空间； (2) E 的每一闭线性子空间是 Schur 空间；

(3) E 的每一可分闭线性子空间是 Schur 空间。

证明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) 显然。现证 (3) ⇒ (1)。事实上，若 (3) 成立，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得 $x_n\xrightarrow{W}0$，记 $E_0=\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，则 E_0 是 E 的可分闭线性子空间，因而是 Schur 空间，又由泛函延拓定理，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E_0 中 W 收敛于 0，从而 $\|x_n\|\to 0$，所以 E 是 Schur 空间。证毕。

推论 对于任何指标集 Γ，Banach 空间

$l^1(\Gamma)\equiv\{x=(x_r)_{r\in\Gamma};\ \sum_{r\in\Gamma}|x_r|<+\infty,\ \|x\|=\sum_{r\in\Gamma}|x_r|\}$ 是 Schur 空间。

证明 首先易知，对于任何可数指标集 Γ，$l^1(\Gamma)$ 等距同构于 l^1，故由命题2得 $l^1(\Gamma)$ 是 Schur 空间。对一般的指标集 Γ，设 G 是 $l^1(\Gamma)$ 的任意的可分闭线性子空间，则必有至多可数的子集 $\Gamma_0\subset\Gamma$，使得对 $\forall x\in G$，$\forall r\notin\Gamma_0$，$x_r=0$，故 G 是 $l^1(\Gamma_0)$ 的闭线性子空间，从而 G 是 Schur 空间。由定理1，$l^1(\Gamma)$ 是 Schur 空间。证毕。

引理 设 E 是 Banach 空间，M 是 E 的闭线性子空间，Q_M：$E\to E/M$ 是商映象，序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$，则有

$$Q_Mx_n\xrightarrow{W}0\Longleftrightarrow f(x_n)\to 0,\quad \forall f\in M^{\perp}.$$

* 1983年10月15日收到。

这里 $M^{\perp}=\{f\in E^*;\ f(x)=0,\ \forall x\in M\}$。

证明 由 [2, 定理 18.1, p74], 共轭映象 Q_M^*: $(E/M)^*\to M^{\perp}$, $M^{\perp}\subseteq E^*$, 是映满的等距同构，由此即得引理的结论。证毕。

下面证明本文的主要结果。

定理2 设 E 是 Banach 空间，M 是 E 的闭线性子空间，若 M 和商空间 E/M 均是Schur 空间，则 E 是 Schur 空间。

证明 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 使得 $x_n\xrightarrow{W}0$, 由引理知, $Q_M x_n\xrightarrow{W}0$ 因 E/M 是 Schur 空间，故 $\|Q_M x_n\|\to 0$, 由商空间范数的定义, 存在 $y_n\in M$, 使得 $\|x_n+y_n\|\to 0$。于是 $y_n=(x_n+y_n)-x_n\xrightarrow{W}0$, 由于 M 是 Schur 空间，得 $\|y_n\|\to 0$, 从而 $x_n=(x_n+y_n)-y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}0$。因此，$E$ 是Schur 空间。证毕。

注 定理 2 的逆不真. 事实上，每一可分 Banach 空间均等距同构于 l^1 的某一商空间。

若 E 是无限维的 Schur 空间，则 E 的闭单位球 $B(E)=\{x\in E;\ \|x\|\leqslant 1\}$ 中必有子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有 W 收敛子列，由 [3, 定理 2.e.5., p99], $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 含有子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 等价于 l^1 的单位基，即有常数 $c>0$, 使得

$$(*)\qquad \left\|\sum_{i=1}^{m}a_i x_{n_i}\right\|\geqslant c\sum_{i=1}^{m}|a_i|,$$

其中 $a_1,\cdots,a_m$ 是任意有限个实数。

由 (*) 易知，E 的子空间 $\overline{\mathrm{span}}\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 同构于 l^1, 因此我们证明了下面的

定理3 设 E 是 Schur 空间，则以下各项等价：

(1) E 是有限维的；(2) E 是自反的；(3) E^* 是可分的；(4) E^* 是 Schur 空间。

下面，我们简单地讨论 Schur 空间的不动点性质。我们称 Banach 空间 E 具有不动点性质，如果对 E 中每一非空 W 紧凸集 C 和 C 上的任一非扩张映象 T (即映象 T: $C\to C$ 满足条件：对任意的 x、$y\in C$, $\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$), 均有 $\mathrm{Fix}(T)\neq\varnothing$, 这里，$\mathrm{Fix}(T)=\{x\in C;\ Tx=x\}$ 表 T 在 C 中的不动点集。

定理4 若 E 是 Schur 空间，则 E 具有不动点性质。

证明 设 C 是 E 中非空 W 紧凸子集，T: $C\to C$ 为非扩张映象。任意 $u_0\in C$, 作映象列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$T_n(x)=\frac{1}{n}u_0+\left(1-\frac{1}{n}\right)Tx,\quad \forall x\in C,\ n=1,2,\cdots.$$

易知，T_n: $C\to C$ 是压缩映象，由Banach 压缩映象原理，存在 $x_n\in C$, 使 $Tx_n=x_n$。容易得到

$$(**)\quad \|Tx_n-x_n\|\leqslant\frac{1}{n}\mathrm{diam}\,C,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

其中 $\mathrm{diam}\,C=\sup\{\|x-y\|;\ x,y\in C\}$ 是 C 的直径。

由于 Banach 空间中的 W 紧性与 W 序列紧性等价，故 C 是 W 序列紧的。取子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\subset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_{n_i}\xrightarrow{W}\xi\in C$。因 E 是 Schur 空间，得 $\|x_{n_i}-\xi\|\to 0$, 由不等式 (**) 即得 $T\xi=\xi$, 即 $\xi\in\mathrm{Fix}(T)$ 是 T 的不动点。证毕；

参 考 文 献

[1] Bourgain, J., New Clsses of L^p-Spaces, Springer-Verlag (1981), pp1—5.
[2] 中野秀五郎，巴拿赫空间论，科学出版社(1960), pp73—83.
[3] Lindenstrauss, J., Classical Banach Spaces I. Springer- Verlag (1973), pp95—104.