第4卷 第4期
1984年10月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.4
Oct. 1984

关于B. E. Rhoades的两个不动点定理的反例*

卢同善

（山东海洋学院）

B. E. Rhoades[1]中定理10和定理16是错误的。现举反例说明之。

（一）[1]中定理10为：

设 $f\in(73)$，且诸 a_i 满足：

（1） $r(t)\cdot s(t)=\frac{a_1(t)+a_3(t)+a_5(t)}{1-\alpha_2(t)-\alpha_3(t)}\cdot\frac{a_2(t)+a_4(t)+a_5(t)}{1-\alpha_1(t)-\alpha_4(t)}<1$ 对任何 $t>0$ 均成立。又设 $x_0\in X$。则 f^p 或 f^q 有不动点。若再有：

（2） $\lim\limits_{t\to0+}(a_2(t)+a_3(t))<1$ 及 $\lim\limits_{t\to0+}(a_1(t)+a_4(t))<1$

则 f 有唯一之不动点 z，且 $f^n(x_0)\to z$。

按Rhoades的定义，$f\in(73)$意指：$\forall x,y\in X,x\neq y$，均有：

$$d(f^p(x),f^q(y))\leqslant a_1(d(x,y))d(x,f^p(x))+a_2(d(x,y))d(y,f^q(y))$$
$$+a_3(d(x,y))d(x,f^q(y))+a_4(d(x,y))d(y,f^p(x))+a_5(d(x,y))d(x,y)$$

其中 p，q 均为正整数；诸 $a_i(t)$：$(0,+\infty)\to[0,1)$，为单调减函数，且 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i(t)<1$；$X$ 为完备的距离空间。

反例如下：

取 $X=\{0,1\}$，X 作为 R^1 之子空间，显然是完备的。由 X 到 X 定义映射 f：$f(0)=1$，$f(1)=0$。

取 $p=1$，$q=2$。任取单调减函数 $\alpha(t)$：$(0,+\infty)\to[0,1)$。取 $a_1(t)\equiv a_2(t)\equiv a_3(t)\equiv a_4(t)\equiv0$，$a_5(t)\equiv\alpha(t)$。

则 $f\in(73)$，且诸 $a_i(t)$ 满足（1）和（2），但 f 无不动点。

事实上，上述反例即说明，Rhoades定义下的第(52)种压缩型映射不一定有不动点。（按Rhoades之定义，$f\in(52)$意指：$\forall x,y\in X,x\neq y$，均有：

$$d(f^p(x),f^q(y))\leqslant\alpha(d(x,y))d(x,y)$$

其中 p，q 为正整数，$\alpha(t)$：$(0,+\infty)\to[0,1)$为减函数。）

（二）[1]中定理16为：

设 $f,g\in(148)$，且诸 α 满足定理10之条件(1)，$x_0\in X$，则 $(fg)^n(x_0)$ 和 $(gf)^n(x_0)$

* 1983年10月20日收到。

均收敛。若再设，定理10之条件（2）也被满足，则f和g有公共的唯一的不动点，且$(fg)^n(x_0)\to z$，$(gf)^n(x_0)\to z$。

按Rhoades的定义，$f,g\in(148)$意指：$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，均有：

$$d(f(x),g(y))\leqslant a_1(d(x,y))d(x,f(x))+a_2(d(x,y))d(y,g(y))$$
$$+a_3(d(x,y))d(x,g(y))+a_4(d(x,y))d(y,f(x))+a_5(d(x,y))d(x,y).$$

其中诸$a_i(t)$：$(0,+\infty)\to[0,1)$，为单调减函数，且$\sum_{i=1}^{5}a_i(t)<1$。X为完备距离空间。

反例如下：

仍取 $X=\{0,1\}$，作为R^1之子空间。

由X到X定义映射f和g：

$$f(0)=1,\ f(1)=0;\ g(0)=0,\ g(1)=1.$$

任取一单调减函数 $a(t)$：$(0,+\infty)\to[0,1)$。

取 $a_1(t)\equiv a_2(t)\equiv a_3(t)\equiv a_4(t)=0$，$a_5(t)\equiv a(t)$。

则显然$f,g\in(148)$，且诸$a_i(t)$满足定理10之条件(1)、(2)。但f和g无公共不动点（f本身根本无不动点）。

事实上，这一反例即说明，Rhoades定义下的第(127)种映射不一定有公共不动点。(按Rhoades之定义，$f,g\in(127)$，意指：$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，均有：

$$d(f(x),g(y))\leqslant a(d(x,y))d(x,y),$$

其中 $a(t)$：$(0,+\infty)\to[0,1)$，为减函数。)

注 对(148)种压缩型映射，只能有C. S. Wong[2]的结论，即在定理16的条件下，f和g至少有一个有不动点。如果已知它们均有不动点，则f和g均有唯一的不动点，且它们的不动点相合(即f和g有唯一的公共不动点)。

四川大学张石生老师对本文作了审阅，在此深表感谢。

参 考 文 献

[1] Rhoades. B. E., A Comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 226 (1977). 257-290.

[2] Wong, C. S., Common fixed points of two mappings, *Pacific J. Math.* 48 (1973), 299-312.