第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

具有有限个奇点的 Lienard 方程存在环的一个充分条件*

谭 宣

（哈尔滨科技大学）

一、序 言

设 Lienard 方程 $\ddot{x}+f(x)\cdot\dot{x}+g(x)=0$ 的等价方程为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y-F(x)\\-g(x)\end{pmatrix},\tag{1}$$

其中

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx.\tag{2}$$

方程(1)对于单奇点的情形已有不少人如张芷芬、曾宪武、丁苏江等人研究过。对于多奇点的情形，文献[1]要求存在环域其内有有限个奇点并且方程过环域境界线的轨线都要进入该环域这个条件。对于多奇点的系统由于必含鞍点其轨线走向难于判定，并且[1]的广义奇闭轨线包括稳定的奇点，这对多稳系统的失稳状态不便应用。

本文对具有有限个奇点的 Lienard 方程(1)给出一个充分条件，因限于篇幅，本文先给出引理及定理，有关证明从略。

二、引 理

设方程(1)的奇点 p_a: $\begin{pmatrix}a\\F(a)\end{pmatrix}$ 满足

$$g(a)=0\tag{3}$$

引理 1 若奇点 p_a 对 a 具有邻域 $\delta(a)$，在其内

1. $f(x)$ 对 x 为可积，
2. $g(x)$ 为 x 的连续函数，
3. 方程(1)保证解依赖初值的唯一性，
4. $\int_a^x g(x)dx>0$，(4)
5. $-g(x)F(x)>0(<0)$，(5)

则该奇点 p_a 为 $\alpha(\omega)$ 渐近稳定的。

引理 2 若 1. $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上对 x 可积，

2. $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上为 x 的连续函数并且 $g(0)=0$，
3. 方程(1)保证解对初值的唯一性，

则 1. 对 $\forall\lambda>0(<0)$，在 $x=\lambda$ 的直线上 $y=F(\lambda)$ 的上(下)方必有点 $B'(H')$ 位于来自 $x=0$ 的正(负)半轴上的某一点所经过的方程(1)的轨线上并且对 $B'(H')$ 的上(下)方的任一点，该结论仍成立；

* 1982年8月15日收到。

2. 对 $\forall\lambda>0(<0)$，在 $x=0$ 的负(正)半轴有点 $E'(K')$ 位于来自 $x=\lambda$ 直线 $y=F(\lambda)$ 的下(上)方的某一点所经过的方程(1)的轨线上并且对 $E'(K')$ 的下(上)方的任一点，该结论仍成立。

引理3 若1. 方程(1)满足引理2的条件，

2. $\exists k_1\in$ 实数，$N>0$；当 $x>N$ 使 $F(x)\geqslant k_1$

($\exists k_2\in$ 实数，$N'<0$；当 $x<N'$ 使 $F(x)\leqslant k_2$)

3. $\inf\limits_{x>N} g(x)>0$；　　$(\sup\limits_{x<N'} g(x)<0)$，

则在 $x=0$ 的正(负)半轴上有点从其上(下)方任一点 $A(E)$ 经过的方程(1)的轨线必绕第Ⅰ(Ⅲ)，第Ⅳ(Ⅱ)象限穿越 $y=F(x)$ 零迹线于有限时间达到 $x=0$ 的负(正)半轴的某一点 $E(K)$。

若 $+\infty>\sup\limits_{x>N}F(x)\geqslant F(x)\geqslant k_1>0$，$(-\infty<\inf\limits_{x<N'}F(x)\leqslant F(x)\leqslant k_2<0)$ 则 $|OE|<|OA|$ $(|OK|<|OE|)$，

若 $0>\sup\limits_{x>N}F(x)\geqslant F(x)\geqslant k_1$，$(k_2\geqslant F(x)\geqslant\inf\limits_{x<N'}F(x)>0)$ 则 $|OE|>|OA|$ $(|OK|>|OE|)$

三、定　　理

定理 若1. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上对 x 为连续函数，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上对 x 为连续函数并且保证方程(1)的解依赖初值的唯一性；

2. $\exists k_1,k_2\in$ 实数，$N>0>N'$；

当 $x>N$ 使 $+\infty>\sup\limits_{x>N}F(x)\geqslant F(x)\geqslant k_1$，当 $x<N'$ 使 $-\infty<\inf\limits_{x<N'}F(x)\leqslant F(x)\leqslant k_2$，

3. $k_1>0>k_2$，$(\inf\limits_{x<N'}F(x)>0>\sup\limits_{x>N}F(x))$；

4. $g(x)$ 只有有限个零点均为单零点，设为

$a_{-m},\cdots,a_{-1}$，$a_0,a_1,\cdots,a_n$，使 $g(a_k)=0$，　　$k=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots,n$；

5. $\inf\limits_{x>N}g(x)>0>\sup\limits_{x<N'}g(x)$，

6. 方程(1)的奇点为 p_k：$\begin{pmatrix}a_k\\F(a_k)\end{pmatrix}$，$k=-m,\cdots,-1,0,1\cdots,n$，

在只含唯一奇点 p_k 的邻域内满足

6.1 $(-1)^k\int_{a_k}^{x}g(x)dx>0$ 并且 $(-1)^k(F(x)-F(a_k))g(x)>0(<0)$，$k=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots,n$，

或者满足

6.2 $(-1)^{k+1}\int_{a_k}^{x}g(x)dx>0$ 并且 $(-1)^{k+1}(F(x)-F(a_k))g(x)>0(<0)$，$k=-m,\cdots,-1,0,1,\cdots,n$；

则 1. 方程(1)至少存在一个分界线环或极限环；

2. 若满足条件6.1，则方程(1)有奇数个 $\alpha(\omega)$ 渐近稳定的奇点，有偶数个鞍点，二者互相间隔；

3. 若满足条件6.2，则方程(1)有偶数个 $\alpha(\omega)$ 渐近稳定的奇点，有奇数个鞍点，二者互相间隔。

参　考　文　献

[1] 马知恩：环域定理与奇点概念的推广，数学学报，第20卷第一期，1977年3月。