第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

论由 $I_\rho(f;x)$ 向对应 $I(f;x;\rho)$ 的逼近性质的传递*

周克成

(南京大学)

本文采用乘子法[6] 研究对应奇异积分 $I_\rho(f;x)$ 与 $I(f;x;\rho)$ 逼近性质的相互关系，着重讨论 $I_\rho(f;x)$ 的逼近性质向 $I(f;x;\rho)$ 的传递问题。

文中证明了对应奇异积分能够有同阶的正逼近定理。在一定条件下，分别就 $0<\alpha<1$，$0<\alpha<2$，$\alpha=2$ 三种情形，证明了对应核的 α 阶绝对矩之间的精致关系。给出了非周期奇异积分关于 Lip 函数类的逼近度量的渐近性质。文中建立了对应核 C.H. Бернщтейн 型不等式的等价过渡，指出对应奇异积分能够有类同的逆逼近定理。从而若干常用奇异积分的结构与正、逆逼近定理是本文结果的特例。此外，还给出 Fejer-Коровкйн 与 Ghermanesco 非周期奇异积分的正、逆逼近定理和渐近展式。

一 正逼近定理

设 $\lambda_\rho(x)$ 是一非负乘子，$\chi(x;\rho)$ 是周期核 $\chi_\rho(x)\in L^\infty_{2\pi}$ 通过

$$\chi(x;\rho)=\chi_\rho(x)\cdot\lambda_\rho(x) \tag{1}$$

产生的非周期核，且假定 $\chi(x;\rho)$ 的 α 阶绝对矩 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^\alpha\cdot|\chi(u;\rho)|\,du$ 对某个 $\alpha>0$ 存在，则显然有 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\geqslant m(\chi_\rho;\alpha)$。这里 $m(\chi_\rho;\alpha)$ 是 $\chi_\rho(x)$ 的 α 阶绝对矩 $m(\chi_\rho;\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u|^\alpha\cdot|\chi_\rho(u)|\,du$。由此可见，可由 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$ 来度量对应周期奇异积分的逼近阶。

为了讨论由 $m(\chi_\rho;\alpha)$ 来度量对应非周期奇异积分的逼近阶的问题，我们先建立一以后有用的引理。

引理1 设 $\lambda_\rho(x)$ 是一推广整函数型乘子[6]，且对某个非负整数 k，关于 $\rho\in A=(0,\infty)$ 一致地成立 $|x|^kG_\rho(x)=O(1)\ (x\to\infty)$，则对每个 $n\in\mathbf{N}$，关于 $\rho\in A$ 一致地成立 $\sup\limits_x|x^k\lambda_\rho^{(n)}(x)|=O(1)$。

定理1 设 $\chi_\rho(x)\in L^\infty_{2\pi}$ 是偶的逼近恒同核，偶函数 $\lambda_\rho(x)$ 是对 $\rho\in A$ 一致地成立 $x^2G_\rho(x)=O(1)\ (x\to\infty)$ 的推广整函数型乘子。$\chi(x;\rho)$ 由 (1) 给出。那么，若对某个 $0<\alpha\leqslant1$ (或某个 $0<\alpha\leqslant2$)，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(2k\pi)=O(m(\chi_\rho;\alpha))\ (\rho\to\infty)$，则对每个 $f\in\mathrm{Lip}(X(\mathbf{R});\alpha)_M$ (或每

---

*1981年12月28日收到。本文所用记号，除非特别声明，均参照[1]。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

个 $f\in \mathrm{Lip}^*(X(\mathrm{R});\alpha)_{M^*}$，有 $\|I(f;\cdot;\rho)-f(\cdot)\|_{X(R)}=O(m(\chi_\rho;\alpha))\ (\rho\to\infty)$。

证 设 $f\in\mathrm{Lip}(X(\mathrm{R});\alpha)_M$，则由广义 Minkowski 不等式得到 $\|I(f;\cdot;\rho)-f(\cdot)\|_{X(R)}\leqslant Mm(\chi_\rho;\alpha)+2\|f\|_{X(R)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|u|>\pi}|\chi(u;\rho)|du$。

考察

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|u|>\pi}|\chi(u;\rho)|du=2\int_{-\pi}^{\pi}|\chi_\rho(u)|\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(u+2k\pi)du.$$

我们有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}|\chi_\rho(u)|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(u+2k\pi)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(2k\pi)\right)du\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{u\in\Delta_k}|\lambda_\rho'(u)|\right)\int_{-\pi}^{\pi}|u|\cdot|\chi_\rho(u)|du.$$

这里 $\Delta_k=[(2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$。

由引理 1 可见级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{u\in\Delta_k}|\lambda_\rho'(u)|$ 对每个 $\rho\in\mathbf{A}$ 收敛，且对全体 $\rho\in\mathbf{A}$ 以某一与 ρ 无关的常数为界。所以，由 $\left|\int_{-\pi}^{\pi}|\chi_\rho(u)|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(u+2k\pi)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(2k\pi)\right)du\right|=O\left(\int_{-\pi}^{\pi}|u|\,|\chi_\rho(u)|du\right)$ 即知若对某个 $\alpha,0<\alpha\leqslant1$，$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(2k\pi)=O(m(\chi_\rho;\alpha))$，则 $\int_{|u|\geqslant\pi}|\chi(u;\rho)|du=O(m(\chi_\rho;\alpha))$。

在 $f\in\mathrm{Lip}^*(X(\mathrm{R});\alpha)_{M^*}$ 情形，类似于上述证明，注意到 $\lambda_\rho(x)$ 是偶函数，稍加变形即可证得结论。证完。

附注1 在定理 1 中并未假设 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$ $(\alpha\geqslant1)$ 的存在性。由于若取 $\lambda_\rho(x)=\lambda(x)$，则必有 $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(2k\pi)=0$。从而对任何周期核 $\chi_\rho(x)$ 总有 $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(2k\pi)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$。因此，即使 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\ (\alpha\geqslant1)$ 不存在，而 $I(f;x;\rho)$ 也可有较高的逼近阶。这表明逼近阶主要与参数 ρ 的分布有关。

现在进而给出对应核的 α 阶绝对矩的关系。由于已有 $m(\chi_\rho;\alpha)\leqslant m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$，因此讨论相反的关系是有意义的。于此我们有

定理2 在定理 1 的假设下，当 $0<\alpha<1$ 时，必存在常数 A、B，使估式

$$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\leqslant m(\chi_\rho;\alpha)+A\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)\right)+B\cdot m(\chi_\rho;1)$$

成立。因而，若 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$ 与 $m(\chi_\rho;1)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$ 成立，则

$$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)=m(\chi_\rho;\alpha)+o(m(\chi_\rho;\alpha))\quad(\rho\to\infty).$$

证 事实上，$\chi(x;\rho)$ 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶绝对矩存在，且

$$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}|u|^\alpha\cdot|\chi_\rho(u)|\lambda_\rho(u)du+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi+u)^\alpha\cdot\lambda_\rho(2k\pi+u)\cdot|\chi_\rho(u)|du\equiv I_1+I_2$$

显然 $I_1\leqslant m(\chi_\rho;\alpha)$。关于 I_2，据其表达式并应用引理 1，不难证明存在常数 A、B，使得 $I_2\leqslant A\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)\right)+Bm(\chi_\rho;1)$ 成立。证完。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

推论1　在定理 2 中，

(i) 若取 $\lambda_\rho(x)=\lambda(x)$，则对任何 $\chi_\rho(x)\in L^\infty_{2\pi}$ 的偶逼近恒同核，必存在常数 c 使得 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\leqslant c\cdot m(\chi_\rho;\alpha)$ 成立，$(0<\alpha<1)$。

(ii) 若取 $\rho=n$，乘子 $\lambda_n(x)$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_n(2k\pi)=o(n^{-1})$，则对任何偶正多项式核 $\chi_n(x)$，必存在常数 $\tilde{c}$ 使得 $m(\chi(\cdot;n);\alpha)\leqslant\tilde{c}\cdot m(\chi_n;\alpha)$ 成立，$(0<\alpha<1)$。

定理3　在定理 1 的假设中，若设对 $\rho\in A$ 一致地成立 $|x|^3G_\rho(x)=O(1)$ $(x\to\infty)$，那么当 $0<\alpha<2$ 时，必存在常数 A、B，使估式

$$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\leqslant m(\chi_\rho;\alpha)+A\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)\right)+B\cdot m(\chi_\rho;2)$$

成立，因而，若 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$ 与 $m(\chi_\rho;2)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$ 成立，则 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)=m(\chi_\rho;\alpha)+o(m(\chi_\rho;\alpha))$ $(\rho\to\infty)$。

证　事实上，$\chi(x;\rho)$ 的 $\alpha(0<\alpha<2)$ 阶绝对矩存在，且

$$\begin{aligned}m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)&=2\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi u^\alpha\lambda_\rho(u)\,|\chi_\rho(u)|\,du\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'|2k\pi+u|^\alpha\cdot\lambda_\rho(2k\pi+u)\cdot|\chi_\rho(u)|\,du\right\}\\&\doteq I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然 $I_1\leqslant m(\chi_\rho;\alpha)$。关于 I_2，据其表达式稍作推敲并应用引理 1，不难证明存在常数 A、B，使得

$$I_2\leqslant A\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)\right)+Bm(\chi_\rho;2)$$

成立。证完。

推论2　在定理 3 中，

(i) 若取 $\lambda_\rho(x)=\lambda(x)$，则对任何 $\chi_\rho(x)\in L^\infty_{2\pi}$ 的偶逼近恒同核，必存在常数 c 使得 $m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\leqslant cm(\chi_\rho;\alpha)$ 成立 $(0<\alpha<2)$。

(ii) 若取 $\rho=n$，乘子 $\lambda_n(x)$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^\alpha\lambda_n(2k\pi)=o(n^{-2})$，则对任何偶正多项式核 $\chi_n(x)$，必存在常数 $\tilde{c}$ 使得 $m(\chi(\cdot;n);\alpha)\leqslant\tilde{c}m(\chi_n;\alpha)$ 成立 $(0<\alpha<2)$。

当 $\alpha=2$ 时，上述方法不适用。事实上，非周期核的 2 阶绝对矩与周期核更细致的性质有关。于此我们有

定理4　设 $\chi_\rho(x)$ 是满足 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{1-\chi_\rho^\wedge(2)}{1-\chi_\rho^\wedge(1)}=4$ 的偶正逼近恒同核。偶函数 $\lambda_\rho(x)$ 是对 $\rho\in A$ 一致地有 $x^4G_\rho(x)=O(1)$ $(x\to\infty)$ 的推广整函数型乘子，且满足 $\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^2\lambda_\rho(2k\pi)=o(m(\chi_\rho;2))$ 与对每个 $k=1,2,\cdots$，$\lim\limits_{\rho\to\infty}\lambda_\rho'(2k\pi)=\lim\limits_{\rho\to\infty}\lambda_\rho''(2k\pi)=0$。$\chi(x;\rho)$ 由 (1) 给出。那么，$m(\chi(\cdot;\rho);2)=m(\chi_\rho;2)+o(m(\chi_\rho;2))$ $(\rho\to\infty)$。此外，当 $f\in L^\infty$ 且在 $x_0\in R$ 有二阶 Schwarz 导数 $f^{[2]}(x_0)$ 时，有渐近展式 $I(f;x_0;\rho)-f(x_0)=(1-\chi_\rho^\wedge(1))f^{[2]}(x_0)+o(1-\chi_\rho^\wedge(1))$。

证　考察

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$m(\chi(\cdot;\rho);2)=2\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}u^2\lambda_\rho(u)\chi_\rho(u)du\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big((2k\pi+u)^2\lambda_\rho(2k\pi+u)+(2k\pi-u)^2\lambda_\rho(2k\pi-u)\Big)\cdot\chi_\rho(u)du\right\}\equiv I_1+I_2$$

关于 I_1，我们有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}u^2\chi_\rho(u)(\lambda_\rho(u)-\lambda_\rho(0))du\right|=O\left(\int_0^{\pi}u^2\chi_\rho(u)|\lambda_\rho'(\theta u)|du\right)\quad(0<\theta<1).$$

因为 $\lambda_\rho'(x)$ 在每一点 $x\in R$ 等度连续且 $\lambda_\rho'(0)=0$，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\int_0^{\pi}u^2\chi_\rho(u)|\lambda_\rho'(\theta u)|du\leqslant\varepsilon\int_0^{\delta}u^2\chi_\rho(u)du+O\left(\int_{\delta}^{\pi}\chi_\rho(u)du\right),$$

其中 $\delta>0$ 取得使当 $|u|<\delta$ 时，对全体 $\rho\in A$ 有 $|\lambda_\rho'(u)|<\varepsilon$ 成立。注意到对所述偶正核 $\chi_\rho(x)$，有 $\int_{\eta}^{\pi}\chi_\rho(u)du=o(1-\chi_\rho^\wedge(1))$ $(0<\eta<\pi)$ 成立，且由 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{I_\rho(u^2;0)}{I_\rho\left(\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2;0\right)}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u^2}{\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2}=1$ 与 $I_\rho\left(\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2;0\right)=2(-\chi_\rho^\wedge(1))$ 推出 $m(\chi_\rho;2)=2(1-\chi_\rho^\wedge(1))+o(1-\chi_\rho^\wedge(1))$。因此，$\int_0^{\pi}u^2\chi_\rho(u)|\lambda_\rho'(\theta u)|du=o(m(\chi_\rho;2))$。从而即有 $I_1=m(\chi_\rho;2)+o(m(\chi_\rho;2))$。

关于 I_2，考察

$$\Delta\equiv I_2-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}2\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^2\lambda_\rho(2k\pi)\chi_\rho(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}[2\lambda_\rho(2k\pi+\theta_ku)$$
$$+4(2k\pi+\theta_ku)\lambda_\rho'(2k\pi+\theta_ku)+(2k\pi+\theta_ku)^2\lambda_\rho''(2k\pi+\theta_ku)]u^2\chi_\rho(u)du,$$

这里 $0<\theta_k<1$。由引理1知对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)>0$，使

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\{2\sup_{u\in\Delta_k}|\lambda_\rho(u)|+4(2k+1)\pi\cdot\sup_{u\in\Delta_k}|\lambda_\rho'(u)|+[(2k+1)\pi]^2\sup_{u\in\Delta_k}|\lambda_\rho''(u)|\}<\varepsilon$$

对全体 $\rho\in A$ 成立。又由 $\lambda_\rho(x),x\lambda_\rho'(x),x^2\lambda_\rho''(x)$ 在每一点 $x\in R$ 等度连续知存在 $\eta=\eta(\varepsilon)>0$，使当 $|u|<\eta$ 时，对全体 $\rho\in A$ 与 $k=1,\cdots,N$，有 $|(2k\pi+u)^j\cdot\lambda_\rho^{(j)}(2k\pi+u)-(2k\pi)^j\cdot\lambda_\rho^{(j)}(2k\pi)|<\varepsilon/N$ $(j=0,1,2)$ 成立。把 Δ 写成

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}[2\lambda_\rho(2k\pi+\theta_ku)+4(2k\pi+\theta_ku)\lambda_\rho'(2k\pi+\theta_ku)$$
$$+(2k\pi+\theta_ku)^2\lambda_\rho''(2k\pi+\theta_ku)]u^2\chi_\rho(u)du\equiv\Delta_1+\Delta_2.$$

显然有 $|\Delta_2|=O\left(\int_{\eta}^{\pi}\chi_\rho(u)du\right)=o(m(\chi_\rho;2))$。关于 Δ_1，把 Δ_1 写成

$$\Delta_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\eta}\left(\sum_{k=1}^{N}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\right)[2\lambda_\rho(2k\pi+\theta_ku)+4(2k\pi+\theta_ku)\lambda_\rho'(2k\pi+\theta_ku)$$
$$+(2k\pi+\theta_ku)^2\lambda_\rho''(2k\pi+\theta_ku)]u^2\chi_\rho(u)du.$$

利用上述结果与假设条件详细估值，即得 $|\Delta_1|\leqslant9\sqrt{2\pi}\varepsilon\cdot m(\chi_\rho;2)$ $(\rho\geqslant\rho_0)$。进而 $|\Delta|=o(m(\chi_\rho;2))$。即有 $I_2=o(m(\chi_\rho;2))$。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

为证渐近展式，据假设，$f(x)$在x_0有展开$f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)=u^2f^{[2]}(x_0)+$ $+u^2\eta(u)$。其中$\eta(u)\in L^\infty$满足$\lim\limits_{u\to 0}\eta(u)=0$。因此，$I(f;x_0;\rho)-f(x_0)=\frac{1}{2}m(\chi(\cdot;\rho);2)$ $f^{[2]}(x_0)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\eta(u)u^2\chi(u;\rho)du$。根据上述证明，可得$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\eta(u)u^2\chi(u;\rho)du=$ $o(m(\chi_\rho;2))$.因此，渐近展式成立。证完。

附注2　(i) Fejér 核、Abel-Poisson 核不满足定理 4 假设，因而定理 4 不适用。但对满足$\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{1-\chi_\rho^\wedge(2)}{1-\chi_\rho^\wedge(1)}=2$的偶正核，可用定理类似的证明，建立相应的定理。

(ii) 定理 2—4 揭示了为什么我们在圆周群上研究$1-\chi_\rho^\wedge(1)$，而在直线群上研究$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$的理论根源。

作为定理的推论，我们给出非周期奇异积分关于Lip（或Lip*）函数类的逼近度量的两个结果。

引进记号

$$\Delta(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\equiv\ (\text{或}\Delta^*(\chi(\cdot;\rho);\alpha))\ \sup_{\substack{f\in Lip(C;\alpha)_1\\ (\text{或}f\in Lip^*(C;\alpha)_2)}}\|I(f;\cdot;\rho)-f(\cdot)\|_C$$

$$\Delta(\chi_\rho;\alpha)\equiv\ (\text{或}\Delta^*(\chi_\rho;\alpha))\ \sup_{\substack{f\in Lip(C_{2\pi};\alpha)_1\\ (\text{或}f\in Lip^*(C_{2\pi};\alpha)_2)}}\|I_\rho(f;\cdot)-f(\cdot)\|_{C_{2\pi}}$$

这里C是**R**上的一致连续且有界的函数空间。

推论3　在定理 1 的假设下，若对某个α，$0<\alpha<1$，$\sum\limits_{k=1}^\infty(2k\pi)^\alpha\lambda_\rho(2k\pi)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$ $(\rho\to\infty)$，则$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$、$m(\chi_\rho;\alpha)$、$\Delta(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$与$\Delta(\chi_\rho;\alpha)$四个量是等价的。

证　事实上，不难证明$m(\chi_\rho;\alpha)\leqslant\Delta(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\leqslant m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$。由定理 2 即证得推论。

推论4　设$\chi_\rho(x)$是满足$\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{1-\chi_\rho^\wedge(2)}{1-\chi_\rho^\wedge(1)}=4$与$m(\chi_\rho;2)=o(m(\chi_\rho;\alpha))$ $(0<\alpha<2)$的偶正逼近恒同核。乘子$\lambda_\rho(x)$当$0<\alpha<2$时满足定理 3 的假设，当$\alpha=2$时满足定理 4 的假设。则$m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$，$m(\chi_\rho;\alpha)$，$\Delta^*(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$与$\Delta^*(\chi_\rho;\alpha)$四个量是等价的。

证　事实上，不难证明$m(\chi_\rho;\alpha)+o(m(\chi_\rho;\alpha))\leqslant\Delta^*(\chi(\cdot;\rho);\alpha)\leqslant m(\chi(\cdot;\rho);\alpha)$与$\Delta^*(\chi_\rho;\alpha)=m(\chi_\rho;\alpha)+o(m(\chi_\rho;\alpha))$ $(0<\alpha\leqslant 2)$。由定理 3 与定理 4 即证得推论。

二　逆逼近定理

这节总假定偶函数$\lambda_\rho(x)$是对$\rho\in A$一致地成立$x^2G_\rho(x)=O(1)$ $(x\to\infty)$的推广整函数型乘子。$\chi(x;\rho)$是由逼近恒同核$\chi_\rho(x)\in L_{2\pi}^\infty$通过（1）产生的非周期核。

引理 2　(С.Н.Бернштейн 型不等式)

设$\chi_\rho(x)\in W_{C_{2\pi}}^s$，则$\chi(x;\rho)\in W_{C\cap L}^s$，且存在常数$B_l>0$，$l=0,1,\cdots,s$，使$\|\chi^{(l)}(\cdot;\rho)\|_{L^1}\leqslant B_l\cdot\rho^{r_l}$成立当且仅当存在常数$M_l>0$，使$\|\chi_\rho^{(l)}(\cdot)\|_{L^1}\leqslant M_l\cdot\rho^{r_l}$成立.这里$0\leqslant r_{l-1}<r_l$，$l=0$，$1,2,,\cdots,s$，$r_0=0$。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

证　由引理1知对每个 $l\in \mathbf{N}$, $\lambda_\rho^{(l)}(x)\in L^1$, $\sup_x|\lambda_\rho^{(l)}(x)|=O(1)$。从而 $\lambda_\rho^{(l)}(x)$ 在 R 上一致连续。因此，注意到当 $l\leqslant s$ 时，$\chi_\rho^{(l)}(x)\in C_{2\pi}$，由 $\chi^{(l)}(x;\rho)=\sum_{j=0}^{l}C_l^j\chi_\rho^{(j)}(x)\lambda_\rho^{(l-j)}(x)$ 推知 $\chi^{(l)}(x;\rho)\in L^1$ 与 $\chi^{(l)}(x;\rho)$ 在 R 上一致连续且有界 $(l\leqslant s)$。即 $\chi(x;\rho)\in W^s_{C\cap L}$。

考察

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi^{(l)}(x;\rho)|dx-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\chi_\rho^{(l)}(x)|dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{j=0}^{l}C_l^j\chi_\rho^{(j)}(x)\lambda_\rho^{(l-j)}(x+2k\pi)\right|dx$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\chi_\rho^{(l)}(x)|\cdot\lambda_\rho(x+2k\pi)dx$$

由引理 1 不难证明 $|I|\leqslant\sum_{j=0}^{l-1}A_j\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\chi_\rho^{(j)}(x)|dx$，其中 $A_j\,(0\leqslant j\leqslant l-1)$ 是常数。由此即证引理 2。

我们用记号 X_* 表示 $X(\boldsymbol{R})$ 或 $X_{2\pi}$ 中的一个。相应地，用记号 $I^*(f;x)$ 表示 $I(f;x;\rho)$ 或 $I_\rho(f;x)$ 中的一个。由引理 2，根据 C.H.Бернштейн 的证明方法，作一些稍微细致的变动，则可得出下列逆逼近定理。

定理5　设 $\chi_\rho(x)\in W^1_{C_{2\pi}}$，且 $\|\chi_\rho'(\cdot)\|_{L^1_{2\pi}}\leqslant M_1\rho^{r_1}\,(r_1>0,\ M_1>0)$。若某函数 $f(x)$ 对某个 $\alpha>0$，有 $\|I^*(f;\cdot)-f(\cdot)\|_{X_*}=O(\rho^{-\alpha})$，则 $f\in X_*$，且

$$\omega(X_*;f;\delta)=\begin{cases}O(\delta^{\frac{\alpha}{r_1}}) & \alpha<r_1\\ O(\delta|\ln\delta|) & \alpha=r_1\\ O(\delta) & \alpha>r_1.\end{cases}$$

定理6　设 $\chi_\rho(x)\in W^2_{C_{2\pi}}$，且 $\|\chi_\rho''(\cdot)\|_{L^1_{2\pi}}\leqslant M_2\rho^{r_2}$，$\|\chi_\rho'(\cdot)\|_{L^1_{2\pi}}\leqslant M_1\rho^{r_1}\,(0<r_1<r_2)$。若某函数 $f(x)$ 对某个 $\alpha>0$，有 $\|I^*(f;\cdot)-f(\cdot)\|_{X_*}=O(\rho^{-\alpha})$，则 $f\in X_*$，且

$$\omega^*(X_*;f;\delta)=\begin{cases}O(\delta^{\frac{2\alpha}{r_2}}) & \alpha<r_2\\ O(\delta^2|\ln\delta|) & \alpha=r_2\\ O(\delta^2) & \alpha>r_2.\end{cases}$$

定理7　设 $\chi_\rho(x)\in W^{s+2}_{C_{2\pi}}$，$\|\chi_\rho^{(l)}(\cdot)\|_{L^1_{2\pi}}\leqslant M_l\cdot\rho^{r_l}, M_l>0, 0\leqslant r_{l-1}<r_l$，$l=1,2,\cdots,s+2$，$r_0=0$。那么，若对某个 $\alpha>0$，$f\in X(\mathbf{R})$ 可使 $\|I(f;\cdot;\rho)-f(\cdot)\|_{X(R)}=O(^{-(r_s+\alpha)})$，则 $f\in W^s_{X(R)}$，而且，若 $\phi(x)\in AC^{s-1}_{loc}$，$\phi^{(l)}(x)\in X(\mathbf{R})$)，$l=0,1,\cdots,s$，满足 $\phi(x)=f(x)$ (a.e.)，则

$$\omega^*(X(R);\phi^{(s)};\delta)=\begin{cases}O(\delta^{\frac{2\alpha}{r_{s+2}-r_s}}) & \alpha<r_{s+2}-r_s\\ O(\delta^2|\ln\delta|) & \alpha=r_{s+2}-r_s\\ O(\delta^2) & \alpha>r_{s+2}-r_s.\end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

三、应　　用

本节讨论关于乘子法的若干应用。

表1　乘子函数

序号	函　数　表　达　式	性　　质
A	$\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$	整函数型乘子 $x^2\lambda(x)=O(1)$
B	$\lambda_y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y(\mathrm{ch}y-\cos x)}{\mathrm{sh}y\cdot(x^2+y^2)}\quad y=\frac{1}{\rho}\to 0^+$	整函数型乘子 $x^2\lambda_y(x)=O(1)$
C	$\lambda(x)=\frac{3\sin^4\frac{x}{2}}{\sqrt{2\pi}(2+\cos x)\left(\frac{x}{2}\right)^4}$	推广整函数型乘子 $x^4\lambda(x)=O(1)$
D	$\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4$	整函数型乘子 $x^2\lambda(x)=O(1)$
E	$\lambda_n(x)=\frac{(2\pi)^{3/2}\pi}{n^3(a\cos x+c)}\cdot\left(\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{n}}{x^2-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\right)^2$ $a=\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},\ c=\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$	推广整函数型乘子 $x^4\lambda_n(x)=O(1)$
F	$\lambda_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{ax^2+b\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\sin^3\frac{\pi}{n}}\cdot\left(\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{n}}{x^2-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\right)^2$ a 如(E)中所示，$b=\sin\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$	整函数型乘子 $x^2\lambda_n(x)=O(1)$
G	$\lambda_y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\zeta x^2+\beta y^2}{\mathrm{sh}^3y}\left(\frac{\mathrm{ch}y-\cos x}{x^2+y^2}\right)^2$ $\zeta=y\mathrm{ch}y-\mathrm{sh}y,\ \beta=y\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}y,\ y=\frac{1}{\rho}\to 0^+$	整函数型乘子 $x^2\lambda_y(x)=O(1)$
H	$\lambda_y(x)=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y^3}{\zeta\cos x+\gamma}\cdot\left(\frac{\mathrm{ch}y-\cos x}{x^2+y^2}\right)^2$ ζ 如(G)中所示，$\gamma=\mathrm{sh}y\cdot\mathrm{ch}y-y,\ y=\frac{1}{\rho}\to 0^+$	推广整函数型乘子 $x^4\lambda_y(x)=O(1)$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

表2 乘子法产生对应非周期核

周期核	←Σ— Poisson —×→ 乘子法	非周期核
Fejér $F_n(x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$	A	$F(x;n+1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin^2\frac{(n+1)x}{2}}{(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^2}$
Jackson-de la vallée Poussin $V_n(x)=\frac{2+\cos x}{2n^3}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4$	C	$V(x;n)=\frac{3\sin^4\frac{nx}{2}}{\sqrt{8\pi}n^3\left(\frac{x}{2}\right)^4}$
Jackson $J_n(x)=\frac{3}{n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4$	D	$J_1(x;\ n)=\frac{3}{\sqrt{2\pi}n(2n^2+1)}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{\sin^4\frac{nx}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^4}$
	C	$J_2(x;\mathrm{n})=\frac{3}{\sqrt{2\pi}\cdot n(2n^2+1)(2+\cos x)}\cdot\frac{3\sin^4\frac{nx}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^4}$
Abel-Poisson $p_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},\ r\to1^-$	B	$p(x;y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y}{y^2+x^2}\quad y=\ln\frac{1}{r}\to0^+$
Zheng Weixing 参看[3]	E	$z(x;n)=2(2\pi)^{3/2}\frac{\cos^2\frac{nx}{2}}{n^3\cdot\left(x^2-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right)^2}$
Fejér-Коровкйн $k_n(x)=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{nx}{2}}{n\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos x\right)^2}$	F	$k_1(x;n)$ 参看[6]
	E	$k_2(x;n)$ 参看[6]
Ghermanesco $G_r(x)=\frac{1-r^2}{2(1+r^2)}\cdot\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right)^2\ r\to1^-$	G	$G_1(x;y)$ 参看[6]
	H	$G_2(x;y)$ 参看[6]
Anghelutza 参看[5]	H	$A(x;y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2},\ y=\ln\frac{1}{r}\to0^+$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

附注3　(i) 乘子法可视为 Posson 求和公式的逆。(ii) 若干常用奇异积分的核的结构与逼近定理是本文所述结果的特例。

关于 Fejér-Коровкйн 与 Chermanesco 非周期奇异积分的逼近性质可由下述推论给出。

推论5　对 Fejér-Коровкйн 非周期奇异积分

$$k_j(f;x;n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)k_j(u;n)du \quad (j=1,2)$$

若 $f\in \mathrm{Lip}^*(X(\mathbf{R});\alpha)$，则 $\|k_j(f;\cdot;n)-f(\cdot)\|_{X(R)}=O(n^{-\alpha})\quad 0<\alpha\leqslant 2$。

推论6　若函数 $f(x)$ 对某个 $\alpha>0$，有 $\|k_j(f;\cdot;n)\|-f(\cdot)\|_{X(R)}=O(n^{-\alpha})\ \ (j=1),2,)$ 则

$$\omega^*(X(\mathbf{R});f;\delta)=\begin{cases}O(\delta^\alpha) & 0<\alpha<2\\ O(\delta^2|\ln\delta|) & \alpha=2\\ O(\delta^2) & \alpha>2.\end{cases}$$

推论7　设 $f\in L^\infty$ 且存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 有二阶 Schwarz 导数 $f^{[2]}(x_0)$，则 $k_2(f;x_0;n)-f(x_0)=\frac{\pi^2}{2n^2}f^{[2]}(x_0)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$。

推论8　对 Ghermanesco 非周期奇异积分

$$G_j(f;;x;y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)G_j(u;y)du \quad (j=1,2)$$

若 $f\in \mathrm{Lip}^*(X(\mathbf{R});\alpha)$，则 $\|G_j(f;\cdot;y)-f(\cdot)\|_{X(R)}=O(y^\alpha)\quad 0<\alpha\leqslant 2$。

推论9　若函数 $f(x)$ 对某个 $\alpha>0$，有 $\|G_j(f;\cdot;y)-f(\cdot)\|_{X(R)}=O(y^\alpha)\ \ (j=1,2)$，则

$$\omega^*(X(\mathbf{R});f;\delta)=\begin{cases}O(\delta^\alpha) & 0<\alpha<2\\ O(\delta^2|\ln\delta|) & \alpha=2\\ O(\delta^2) & \alpha>2.\end{cases}$$

推论 10　设 $f\in L^\alpha$ 且在 $x_0\in\mathbf{R}$ 有二阶 Schwarz 导数 $f^{[2]}(x_0)$，则 $G_2(f;x_0;y)-f(x_0)=\frac{y^2}{2}f^{[2]}(x_0)+o(y^2)$。

本文在郑维行付教授的指导与鼓励下完成。此稿承苏维宜老师校阅。在此深致感谢。

参　考　文　献

[1] Butzer P. L., Nessel R. J., Fourier Analysis and Approximation, I. One-dimensional Theory. Basel-Stuttgart, 1971.

[2] 阿赫叶惹尔，逼近讲论义，科学出版社，1957.

[3] 郑维行，论算子 $B_\sigma(f;x)$ 的极性，数学学报，15(1965)，54-62.

[4] Коровкйн, П. П., Об одном асимлтотическом свойстве лоложительныx Методов Суммирова-нчя Рядов фуphе. Усnexu. Мат. Hayk, 13(84)(1958), 99-103.

[5] Stark E. L., Erzeugung und strukturelle verknüpfungen von kernen Singulärer faltungsintegrale, Lecture Notes in Mathematics (556), Springer-Verlay. Berlin. Heidelberg. N. Y. 1976, 390-402.

[6] 周克成，论由周期核产生对应非周期核的几类方法，数学研究与评论，第四卷(1984)第三期。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

On the Transmission of the Approximate Properties from $I_\rho(f; x)$ to the Corresponding $I(f; x; \rho)$

Chou Kecheng

(Nanking University)

Abstarct

In this paper, the multiplicator method, which was introduced by the author, is applied to research the transmission of the approximate properties from $I_\rho(f; x)$ to the corresponding $I(f; x; \rho)$. As a result, the indirect theorems, inverse theorems and asymptotic expansions of Fejér-Коровкйн and Ghermanesco non-periodic singular convolution integrals are derived.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.