第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

不动点理论的新发展（Ⅱ）*

张石生

（四川大学数学系）

本文是文章[1,2]的续篇。本文的目的是扼要地概述近十年来概率分析中随机不动点理论的一些主要问题和主要结果。

§1 引 言

随机泛函分析是泛函分析和概率论相结合的一门正在蓬勃兴起的边缘性学科。随机不动点理论在随机泛函分析的研究中起到重要的作用。

随机算子的不动点定理的研究始于本世纪五十年代。以 Špaček，Hanš 为首的捷克学派对随机不动点理论作了开创性的工作。Hanš 的文章[13]是第一个系统研究随机不动点理论的重要文献。以后随着随机泛函分析理论的发展 Špaček[12]，Hanš[14,15]，王梓坤[10]，Bharucha-Reid[16,17]，Itoh[18,19]，Lee，Padgett[28,29]及作者的文章[3—9]等对 Polish 空间（即可分完备的度量空间）中随机算子的不动点定理及其对各种随机算子方程解的应用作过较深入的讨论。为了叙述方便起见，我们先引进一些定义和符号。

以下我们处处假定 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是完备概率空间，X 是可分的 Banach 空间，$(X,\mathscr{B})$ 是可测空间，$\mathscr{B}$ 是 X 中一切 Borel 子集的 σ-代数。

定义1 设 $x(\omega)$ 是映 Ω 到 X 的映象，$x(\omega)$ 称为 X-值的随机元，如果对任一集 $B\in\mathscr{B}$ 有 $\{\omega\in\Omega:\ x(\omega)\in B\}\in\mathscr{A}$。

定义2 $T(\cdot,\cdot)$ 称为是映 $\Omega\times X\to X$ 的随机算子，如果对每一 $x\in X$，$y(\omega)=T(\omega,x)$ 是一 X-值的随机元。

定义3 $T(\cdot,\cdot)$ 称为映 $\Omega\times X\to X$ 的连续随机算子，如果对每一 $\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot)$ 把 X 中的强收敛序列映成 X 中的强收敛列。

定义4 X-值的随机元的序列 $\{x_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为几乎必然地收敛于随机元 $x(\omega)\in X$，如果

$$P(\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\|x_n(\omega)-x(\omega)\|=0)=1.$$

记为 $x_n(\omega)\to x(\omega)$ a. s.

* 1981年10月23日收到.

定义5 设$T(\cdot,\cdot)$是一随机算子，$y(\omega)$是一给定的随机元，满足下面条件的随机元$\xi(\omega)$：

$$P(\omega\in\Omega.\ T(\omega,\xi(\omega))=y(\omega))=1,$$

称为随机算子方程$T(\omega,x(\omega))=y(\omega)$的随机解。

定义6 设$T(\cdot,\cdot)$是一随机算子，$\xi(\omega)$是一随机元，$\xi(\omega)$称为T的随机不动点，如果$\xi(\omega)$是方程$T(\omega,\xi(\omega))=\xi(\omega)$的随机解。

下面的引理，在证明随机不动点存在时，起到重要的作用。

引理3.1 （Kannan，Salehi[20]，王梓坤[10]）设$x(\omega)$是X-值随机元，$T(\omega,\cdot)$是连续的随机算子。则$T(\omega,x(\omega))$是X-值的随机元。

§2 几个基本不动点定理的随机化

在本世纪六十年代以前，在算子方程的理论中广泛地使用着下面三条著名的不动点定理：

i) Banach不动点定理。设(X,d)是一完备的度量空间，设T是映X到X的压缩映象，即存在常数$k\in(0,1)$使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y),\quad \forall x,y\in X.$$

则存在T的唯一不动点x_*，而且对任一$x_0\in X$，迭代序列$x_{n+1}=Tx_n$，$n=0,1,2,\cdots$收敛于x_*并有下之速率估计：

$$d(x_n,x_*)\leqslant\frac{k^n}{1-k}d(x_0,x_1).$$

ii) Schauder不动点定理。设T是映Banach空间的紧凸集E到其自身的连续映象，则T至少存在一不动点。

iii) Kraçnoçel'skii不动点定理。设X是Banach空间，E是X之一有界闭凸集，设S和T是映E到X的映象，使得对每一$x,y\in E$，$Sx+Ty\in E$。如果S是压缩的，T是紧连续映象，则算子方程$Sx+Tx=x$存在解$x_*\in E$。

因此一个自然的想法是首先把这三条定理随机化，然后应用所得结果研究各类随机方程解的存在性、唯一性和可测性.实际上Hanš就是这样作的。他首先把Banach不动点定理随机化，然后应用它来研究具随机核的随机积分方程.Hanš在[13]中证明了下之结果：

定理3.2 [13] 设$T(\omega,\cdot)$是映$\Omega\times X\to X$的压缩随机算子，即存在一非负值随机变量$k(\omega)<1$，使得$\forall x,y\in X$

$$P\{\omega\in\Omega:\ \|T(\omega,x)-T(\omega,y)\|\leqslant k(\omega)\|x-y\|\}=1.$$

则存在唯一的随机变量$\xi(\omega)$，使得$\xi(\omega)$是$T(\cdot,\cdot)$的不动点，即如$\tilde{\xi}(\omega)$是T之另一随机不动点，则$\xi(\omega)=\tilde{\xi}(\omega)$ a. s.

下面的不动点定理是定理3.2的推广形式。

定理3.3 [15] 设X是一可分的Banach空间，设T是映$\Omega\times X\to X$的连续随机算子。设满足条件

$$P\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{x_1\in X}\bigcap_{x_2\in X}[\omega\in\Omega:\ \|T^n(\omega,x_1)-T^n(\omega,x_2)\|\leqslant\left(1-\frac{1}{m}\right)\|x_1-x_2\|]\right\}=1,$$

则存在 X-值的随机变量 $\xi(\omega)$，它是 $T(\cdot,\cdot)$ 的唯一不动点。

上面的结果在随机方程理论中起到基本的作用，它被 Hanš，Bharucha-Reid 成功地应用于线性和非线性随机积分方程解的研究（参看 Bharucha-Reid [16]）。另外随机压缩的不动点定理还被 Wasan [21] 用以研究随机近似程序，也被 Oza，Jury [22] 用以研究由随机差分方程所描述的随机线性离散时间系统识别的算法。

下面的不动点定理是 Schauder 定理的随机化。

定理 3.4 [23,24] 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是一原子的概率测度空间，设 E 是可分 Banach 空间 X 的紧凸集。设 T 是映 $\Omega\times E\to E$ 的紧的随机算子，则存在 T 之一随机不动点。

更有趣的是下面的结果。

定理 3.5 [17] 设 E 是可分 Banach 空间 X 之一紧致凸子集，设 T 是映 $\Omega\times E\to E$ 的连续随机算子。则存在 T 之一随机不动点。

定理 3.4 已被用以证明 C[0,1] 空间中 Uryson 随机积分方程

$$\int_{I(\omega)}K(t,\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau-x(t,\omega)=y(t,\omega)$$

解的存在性，这里 $I(\omega)=[a(\omega),\ b(\omega)]\subset[0,1]$，即 $I(\omega)$ 是 $[0,1]$ 的子区间，又 $a(\omega)$，$b(\omega)$ 是实值随机变量(见[16])。

下面的定理是 Krasnosel'skii 不动点定理的随机化。

定理 3.6 [25] 设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是一概率测度空间，设 E 是可分 Banach 空间 X 之紧凸集。设 $T(\omega,\cdot)$，$S(\omega,\cdot)$ 是映 $\Omega\times X\to X$ 的连续随机算子，并且满足条件

i) $S(\omega,x)+T(\omega,y)\in E\quad \forall x,y\in E$ 和 $\forall\omega\in\Omega$；

ii) 存在一非负实值随机变量 $k(\omega)$，$k(\omega)<1$ a. s.使得

$$\|S(\omega,x)-S(\omega,y)\|\leqslant k(\omega)\|x-y\|,\quad \forall x,y\in E.$$

则存在一 X-值的随机变量 $\xi(\omega)$，使得

$$S(\omega,\xi(\omega))+T(\omega,\xi(\omega))=\xi(\omega)\quad \text{a.s.}$$

§3 随机不动点定理的推广

随着确定型不动点理论的发展，随机型的不动点定理也得到相应的发展。最近作者在文章 [6] 中证明了下面几个较为一般的结果（为叙述简洁起见，以下我们处处假定 X 是一可分的 Banach 空间，$(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是一完备的概率空间)。

定理 3.7 [6] 设 $T(\cdot,\cdot)$ 是映 $\Omega\times X\to X$ 的连续随机算子。设存在正整数 m，使得对任意的 $x,y\in X$ 有

$$\begin{aligned}P(\omega\in\Omega:\ &\|T^m(\omega,x)-T^m(\omega,y)\|\leqslant\Phi(\omega,\|x-y\|,\|x-T^m(\omega,x)\|,\\&\|y-T^m(\omega,y)\|,\|x-T^m(\omega,y)\|,\|y-T^m(\omega,x)\|))=1,\end{aligned}$$

其中 $\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$：$\Omega\times[0,\infty)^5\to[0,\infty)$ 是满足次之条件的随机函数：

(Φ1)　Φ 对每一变量 $t_i,i=1,2,\cdots,5$ 是不减的和右连续的；

(Φ2)　$P(\omega\in\Omega:\ \lim\limits_{t\to\infty}(t-\gamma(\omega,t))=\infty)=1$；

(Φ3)　对每一 $t>0$，$P(\omega\in\Omega.\ \lim\limits_{n\to\infty}\gamma^n(\omega,t)=0)=1$；

上式中的 $\gamma(\omega,t)=\Phi(\omega,t,t,t,t,t)$，$t\geqslant 0$，又 $\gamma^n(\omega,t)$ 表 $\gamma(\omega,t)$ 的 n 次迭代随机函数。

则存在 X-值的随机元 $x_*(\omega)$，它是 $T(\omega,\cdot)$ 的以概率 1 的唯一的随机不动点。而且对任一 X-值的随机元 $x_0(\omega)$，序列 $x_n(\omega)=T^n(\omega,x_{n-1}(\omega))$，$n=1,2,\cdots$ 几乎必然地强收敛于 $x_*(\omega)$。

由定理 3.7 直接可得下面的结果。

定理 3.8 ［6］ 设 $T(\omega,x)$是 $\Omega\times X\to X$ 的连续随机算子，设存在正整数 m，使得对任意的 $x,y\in X$ 有

$$P\{\omega\in\Omega:\ \|T^m(\omega,x)-T^m(\omega,y)\|\leqslant k(\omega)\max[\|x-y\|,\|x-T^m(\omega,x)\|,$$
$$\|y-T^m(\omega,y)\|,\|x-T^m(\omega,y)\|,\|y-T^m(\omega,x)\|]\}=1,$$

其中 $k(\omega)$是 $\Omega\to[0,\infty)$ 的实值随机变量，使得

$$P(\omega\in\Omega:\ 0<k(\omega)<1)=1.$$

则定理 3.7 的结论成立。

注 1 这只要取 $\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=k(\omega)\max\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$，故结论由定理 3.7 即得。

定理 3.9 ［6］ 设 $T(\cdot,\cdot)$是映 $\Omega\times X\to X$ 的连续随机算子，设存在正整数 m，使得对任意的 $x,y\in X$

$$P\{\omega\in\Omega:\ \|T^m(\omega,x)-T^m(\omega,y)\|\leqslant a_1(\omega)\|x-y\|+a_2(\omega)\|x-T^m(\omega,x)\|$$
$$+a_3(\omega)\|y-T^m(\omega,y)\|+a_4(\omega)\|x-T^m(\omega,y)\|+a_5(\omega)\|y-T^m(\omega,x)\|\}=1,$$

其中$a_1(\omega),\cdots,a_5(\omega)$是 $\Omega\to[0,\infty)$ 的随机变量，且满足条件

$$P(\omega\in\Omega:\ a_i(\omega)\geqslant 0,i=1,2,\cdots,\ 5,\sum_{i=1}^{5}a_i(\omega)<1)=1.$$

则定理 6.7 的结论成立。

事实上，因

$$a_1(\omega)\|x-y\|+a_2(\omega)\|x-T^m(\omega,x)\|+a_3(\omega)\|y-T^m(\omega,y)\|$$
$$+a_4(\omega)\|x-T^m(\omega,y)\|+a_5(\omega)\|y-T^m(\omega,x)\|\leqslant Q(\omega)\max\{\|x-y\|,$$
$$\|x-T^m(\omega,x)\|,\|y-T^m(\omega,y)\|,\|x-T^m(\omega,y)\|,\|y-T^m(\omega,x)\|\}\ \text{a.s.},$$

其中 $Q(\omega)=\sum_{i=1}^{5}a_i(\omega)$是实值随机变量且

$$P(\omega\in\Omega:\ 0<Q(\omega)<1)=1,$$

故结论由定理 3.8 得出。

注 2 当 $a_2(\omega)=a_3(\omega)=a_4(\omega)=a_5(\omega)=0$，$m=1$，即得前述的 Hanš 定理 3.2。又刘作述［11］的定理 1 是定理 3.9 当 $m=1$ 的特例。又定理 3.8 是 Ray，Rhoades［30］的定理 1,2，Ciric［31］的定理 1,2 和 Cheh-Chih Yen［26］的定理 1 的随机化。

定理 3.10 ［6］ 设 $T(\omega,\cdot)$是 $\Omega\times X\to X$的连续随机算子，且满足条件

$$P\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{x\in X}\bigcap_{y\in X}[\omega\in\Omega:\ \|T^n(\omega,x)-T^n(\omega,y)\|\leqslant\Phi(\omega,\|x-y\|,\right.\right.$$
$$\left.\left.\|x-T^n(\omega,x)\|,\|y-T^n(\omega,y)\|,\|x-T^n(\omega,y)\|,\|y-T^n(\omega,x)\|)]\right\}\right)=1,$$

其中 Φ 是满足定理 3.7 中的条件（Φ1），（Φ2），（Φ3）的随机函数。则存在 X-值的随机元 $x_*(\omega)$，它是 $T(\omega,\cdot)$ 以概率 1 的唯一的随机不动点。

注 3　Bharucha-Reid [16] 的定理 3，4 及 [17] 的定理 6 都是定理 3.10 当 $\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\left(1-\frac{1}{m}\right)t_1$ 的特例。又如取 $\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=a(\omega)t_1+b(\omega)(t_2+t_3)+c(\omega)(t_4+t_5)$，其中 $a(\omega)$，$b(\omega)$，$c(\omega)$ 是非负值随机变量且满足

$$P(\omega\in\Omega:\ a(\omega)+2b(\omega)+2c(\omega)<1)=1,$$

由定理 3.10，即得 [11] 的定理 2.2。特别当 $b(\omega)=c(\omega)=0$，则得 Hanš-Kolmogorov-Formin 的不动点定理（见 [16] 的定理 3.5）。

另外作者在文章 [5] 中对连续随机算子序列的公共不动点问题，得出下面的一些结果。

定理 3.11　[5]　设 $\{T_i(\omega,\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ 是映 $\Omega\times X\to X$ 的连续随机算子序列。设存在正整数序列 $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对任意的 i，j 和任意的 $x,y\in X$

$$P\{\omega\in\Omega:\ d(T_i^{m_i}(\omega,x),\ T_j^{m_j}(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y),d(x,T_i^{m_i}(\omega,x)),$$
$$d(y,T_j^{m_j}(\omega,y)),d(x,T_j^{m_j}(\omega,y)),d(y,T_i^{m_i}(\omega,x))\}=1,$$

其中 $\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$ 是满足次之条件的随机函数：

（Φ1）′　Φ：$\Omega\times[0,\infty)^5\to[0,\infty)$，对每一固定的 $\omega\in\Omega$，关于每一变量 t_i，$i=1,2,\cdots,5$ 是不减的和右连续的；

（Φ2）′　对每一 $q\in[0,\infty)$，

$P\{\omega\in\Omega$：在 $[0,\infty)$ 中存在方程 $t=\gamma(\omega,t)+q$ 的极大解 $\mu(q)$ 且 $\mu(0)=0\}=1$，

其中 $\gamma(\omega,t)=\Phi(\omega,t,t,t,t,t)$，$t\geqslant0$。则存在 $\{T_i(\omega,\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ 的唯一的随机的公共不动点 $x_*(\omega)$，而且对任一固定的随机元 $x_0(\omega)$，随机元的序列 $x_n(\omega)=T_n^{m_n}(\omega,x_{n-1}(\omega))$，$n=1,2,\cdots$ 几乎必然地收敛于 $x_*(\omega)$。

定理 3.12　[5]　设定理 3.11 中的随机函数 Φ 满足条件（Φ1）′和下面的条件（Φ3）′，其余条件不变。则定理 3.11 的结论仍成立：

（Φ3）′　对每一 $t>0$

(a) $P(\omega\in\Omega:\ \gamma(\omega,t)<t)=1$，

(b) $P(\omega\in\Omega:\ \lim\limits_{t\to\infty}(t-\gamma(\omega,t))=\infty)=1$。

作为定理 3.11 和定理 3.12 在随机逼近理论的应用，作者在[3]中得出了一个与概率论中强大数定理相类似的定理及一个带连续参数的随机连续算子的逼近定理。这些结果加强和改进了王梓坤 [10] 的定理 2.2，2.3，[11]的定理 3.1，3.2，4.1 及 Hanš[13] 中的定理。为此，我们对定理 3.11 中的 Φ 作进一步的假定。

设 Φ 满足条件：i）（Φ1）′；ii）（Φ3）′；

iii）对每一 $t>0$

(a) $P(\omega\in\Omega:\ g(\omega,t)<t)=1$；

(b) $P(\omega\in\Omega:\lim\limits_{t\to\infty}(t-g(\omega,t))=\infty)=1$；

iv）$P(\omega\in\Omega:\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}\Phi(\omega,t,2t,\varepsilon,t,t)=g(\omega,t)$，对 t 一致$)=1$。这里 $g(\omega,t)=\Phi(\omega,t,2t,0,t,t)$。

定理3.13 [3] 设$T_{mn}(\omega,\cdot)$，$m,n=1,2,\cdots$是映$\Omega\times X\to X$的连续随机算子列，满足以下条件：

1° 对任一固定的m：$m=1,2,\cdots$序列$\{T_{mn}(\omega,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$是独立同分布的序列，且对任一$x\in X$和$m$，$T_{mn}(\omega,x)$的Bochner积分存在

$$S_m(x)=(\mathrm{B})\int_{\Omega}T_{mn}(\omega,x)d(P(\omega)),\quad n=1,2,\cdots.$$

2° 存在正整数列$\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$，对任意的正整数$n,i,j=1,2,\cdots$及任意的$x,y\in X$有

$$P(\omega\in\Omega:\ \|S_{in}^{m_i}(\omega,x)-S_{jn}^{m_j}(\omega,y)\|\leqslant\Phi(\omega,\|x-y\|,\|x-S_{in}^{m_i}(\omega,x)\|,$$
$$\|y-S_{jn}^{m_j}(\omega,y)\|,\|x-S_{jn}^{m_j}(\omega,y)\|,\|y-S_{in}^{m_i}(\omega,x)\|))=1.$$

其中Φ是满足条件i)—iv）的随机函数，且

$$S_{mn}(\omega,x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_{mi}(\omega,x),\quad m,n=1,2,\cdots.$$

则1° $S_m(x)$，$m=1,2,\cdots$有唯一的公共不动点$x_*\in X$；

2° 对任一X-值随机元$z_0(\omega)$。序列$z_n(\omega)=S_{nn}^{m_n}(\omega,z_{n-1}(\omega))$，$n=1,2,\cdots$以概率1强收敛于$x_*(\omega)$。

定理3.14 [3] 设$T(\omega,t,x)$是$\Omega\times[0,\infty)\times X\to X$的随机过程算子，对几乎一切的$\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot,\cdot)$是$(t,x)$的二元连续算子，固定$(t,x)\in[0,\infty)\times X$，$T(\cdot,t,x)$是$X$-值随机元。如满足条件

1° 存在满足条件i)—iv)的并对变量t_1,t_2,t_3,t_4,t_5为凸的随机函数Φ和$\hat{x}\in X$，使得对一切的$(t,x)\in[0,\infty)\times X$有

$$P(\omega\in\Omega:\ \|T(\omega,t,x)-T(\omega,t,\hat{x})\|\leqslant\Phi(\omega,\|x-\hat{x}\|,$$
$$\|x-T(\omega,t,x)\|,\|\hat{x}-T(\omega,t,\hat{x})\|,\|x-T(\omega,t,\hat{x})\|,\|\hat{x}-T(\omega,t,x)\|)=1;$$

$$P(\omega\in\Omega:\ \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\|T(\omega,s,\hat{x})-\hat{x}\|ds=0)=1;$$

2° 设$a(t),b(t)$是定义在$(1,\infty)$上不减的连续函数且满足条件：$0\leqslant a(t)<b(t)\leqslant t-1$，$\lim\limits_{t\to\infty}a(t)=\infty$；又设存在实数$r$，使得$\dfrac{a(t)}{b(t)}\leqslant r<1$；

3° 定义X-值的随机过程$x_t(\omega)$：

$$x_t(\omega)=\begin{cases}(1-t)x_0(\omega)+tT(\omega,0,x_0(\omega)), & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{b(t)-a(t)}\displaystyle\int_{a(t)}^{b(t)}T(\omega,S,x_s(\omega))ds, & t>1,\end{cases}$$

其中$x_0(\omega)$是任一X-值随机元。

则随机过程$x_t(\omega)$的轨道以概率1连续，且

$$P(\omega\in\Omega:\ \lim_{t\to\infty}\|x_t(\omega)-\hat{x}\|=0)=1.$$

§4　多值映象的随机不动点定理

在本节中，我们处处假定（X, d）是一可分完备的度量空间，（$\Omega, \mathscr{A}, P$）为一完备的概率空间，$\mathscr{B}$为X的一切 Borel 子集的σ-代数，$CB(X)$表X的一切非空的有界闭集族，2^X表X的一切子集的族。设H是$CB(X)$上由度量d导出的 Hausdorff 度量。

定义7　多值映象 F：$\Omega\to 2^X$ 称为可测的，如果对任一开集 $B\subset X$

$$F^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:\ F(\omega)\cap B\neq\emptyset\}\in\mathscr{A}.$$

定义 8　映象 u：$\Omega\to X$ 称为可测映象 F：$\Omega\to 2^X$ 的可测选择，如果 u 是可测的，且对任一 $\omega\in\Omega$，$u(\omega)\in F(\omega)$。

关于多值压缩映象，Itoh[18]证明了下面的一个重要的随机不动点定理。

定理 3.15　[18]　设 F 是映 $\Omega\times X\to CB(X)$ 的多值映象，设对每一$x\in X$，$F(\cdot, x)$是可测的，对每一$\omega\in\Omega$，$F(\omega,\cdot)$是 $k(\omega)$-压缩的（这里 $k(\omega)$：$\Omega\to[0,1)$ 是一可测函数），即

$$H(F(\omega,x),F(\omega,y))\leqslant k(\omega)d(x,y)\qquad\forall x,y\in X.$$

则存在一可测映象 u：$\Omega\to X$，使得对任意的 $\omega\in\Omega$，$u(\omega)\in F(\omega,u(\omega))$。

在[7]中作者证明了如下的结果

定理 3.16　[7]　i）设 F：$\Omega\times X\to CB(X)$满足下面的条件

（a）对每一$x\in X$，$F(\cdot,x)$ 是可测的，

（b）对每一固定的 $\omega\in\Omega$

$$H(F(\omega,x),F(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y)),\quad\forall x,y\in X,$$

其中 $\Phi(\omega,t)$ 是映 $\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 的满足次之条件的函数：

（Φ1）　对每一$t\geqslant 0$，Φ 关于ω是可测的，对每一 $\omega\in\Omega$，Φ 关于 t 是不减的和右连续的。

（Φ2）　对每一 $t>0$，$\Phi(\omega,t)<t\quad\forall\omega\in\Omega$。

ii）设对任一可测映象 $x_0(\omega)$：$\Omega\to X$，定义可测映象序列 $\{x_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$：$\Omega\to X$ 满足条件

（a）$x_{n+1}(\omega)\in F(\omega,x_n(\omega))$，$n=0,1,2,\cdots$

（b）$d(x_n(\omega),x_{n+1}(\omega))\leqslant\alpha(\omega)H(F(\omega,x_{n-1}(\omega)),F(\omega,x_n(\omega)))$，$n=1,2,\cdots$

其中 $\alpha(\omega)$：$\Omega\to(1,\infty)$是一可测函数。

iii）定义可测函数序列如下：

$$t_0(\omega)=0,\quad t_1(\omega)\geqslant d(x_1(\omega),x_0(\omega)),$$

$$t_{k+1}(\omega)=t_k(\omega)+\Phi(\omega,\alpha(\omega)(t_k(\omega)-t_{k-1}(\omega))),\qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

并假定对每一$\omega\in\Omega$，$\{t_k(\omega)\}$ 收敛于某一可测函数 $t^*(\omega)$。

则存在一可测映象 $x_*(\omega)$：$\Omega\to X$，它是 F 的随机不动点，而且 $\{x_n(\omega)\}$ 收敛于 $x_*(\omega)$ 有如下的速率估计：

$$d(x_*(\omega),x_k(\omega))\leqslant\alpha(\omega)(t^*(\omega)-t_k(\omega))\qquad\forall\omega\in\Omega,\ k=0,1,2,\cdots.$$

定理 3.17　[7]　设多值映象 F：$\Omega\times X\to CB(X)$ 满足条件：

(i) 对每一 $x\in X$，$F(\cdot,x)$ 是可测的；

(ii) 对每一 $\omega\in\Omega$

$$H(F(\omega,x),F(\omega,y))\leqslant q(\omega)d(x,y)\quad \forall x,y\in X;$$

其中 $q(\omega)$：$\Omega\to[0,1)$ 是一可测函数．则存在唯一的可测映象 $x_*(\omega)$：$\Omega\to X$，使得对每一 $\omega\in\Omega$，$x_*(\omega)\in F(\omega,x_*(\omega))$．

上述二定理改进了 Itoh[18]，Špaček[12]，Hanš[13,14] 和 Bharucha-Reid [16] 中相应的结果．

关于多值映象序列的公共随机不动点问题，作者在 [8] 中证明了下面的结果

定义 3.18　[8]　设 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$：$\Omega\times X\to C(X)$ 是一多值映象序列．设对每一 T_i，$i=1,2,\cdots$，固定 $x\in X$，$T_i(\cdot,x)$ 可测．固定 $\omega\in\Omega$，$T_i(\omega,\cdot)$ 连续，而且对每一可测映象 u：$\Omega\to X$，$T_i(\omega,u(\omega))$ 可测．再设对任意的正整数 $i,j=1,2,\cdots$ 和任意的 $x,y\in X$，

$$P\{\omega\in\Omega:\ H(T_i(\omega,x),T_j(\omega,y))\leqslant\Phi(\omega,d(x,y)d(x,T_i(\omega,x)),$$

$$d(y,T_j(\omega,y)),d(y,T_i(\omega,x)),d(x,T_j(\omega,y)))\}=1,$$

其中 $\Phi(\omega,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$：$\Omega\times[0,\infty)^5\to[0,\infty)$ 满足次之条件：

(i) 对每一固定的 (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)，Φ 关于 ω 可测，对每一 $\omega\in\Omega$，$\Phi(\omega,\ \cdots)$ 对每一变量 t_i，$i=1,2,\cdots,5$，不减和右连续．

(ii) 对每一 $t>0$

$$P(\omega\in\Omega:\ \Phi(\omega,t,t,t,a_1t,a_2t)<t)=1,$$

其中 $a_i=0,1,2$，$i=1,2$，且 $a_1+a_2=2$．又 $C(X)$ 表 X 的一切非空紧子集的集合族．

则存在唯一的可测映象 u：$\Omega\to X$（在几乎处处意义下），使得 $u(\omega)\in T_i(\omega,u(\omega))\,a.\,s.$，$i=1,2,\cdots$．

§5　几个值得研究的问题

在结束本文时，我们还要谈到 Bharucha-Reid [17] 中提出的目前随机不动点理论中值得研究的几个问题：

(Ⅰ) 对下列一些确定性的不动点定理，作出概率类比，将是有意义的．

(i) 非扩张映象的不动点定理；

(ii) Edelstein 型压缩映象，即 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$ $\forall x,y\in X$，型映象的不动点定理；

(iii) Kakutani 不动点定理；

(iv) Petryshyn [27] 中某些结果的随机化．

(Ⅱ) 设 $T(\omega,\cdot)$ 是 Banach 空间 X 上的压缩随机算子，设 $\xi(\omega)$ 是其唯一的不动点．因 $\xi(\omega)$ 是一 X-值的随机元，如果其 Bochner 积分存在，故可以定义其期望

$$\bar{\xi}=E\{\xi(\omega)\}=(B)\int_{\Omega}\xi(\omega)d\mu.$$

同样，若$T(\omega,\cdot)$是X上的一致压缩随机算子，且$T(\omega,x)$是 Bochner 可积，则可定义$T(\omega,\cdot)$的期望

$$Sx=E\{T(\omega,x)\}=(B)\int_{\Omega}T(\omega,x)d\mu.$$

显然S是X上的压缩算子，故它有唯一不动点，比如ψ，我们称之为$T(\omega,\cdot)$的期望的不动点。一个很有意义的问题是：T满足什么样的条件有$\xi=\psi$?

（Ⅲ）设$\{T_n(\omega,\cdot)\}$是随机压缩算子列，按某种意义收敛于随机压缩算子$U(\omega)$，问是否$\{T_n(\omega,\cdot)\}$的随机不动点列$\{\xi_n(\omega)\}$也按某种意义收敛于$U(\omega)$的不动点$\varphi(\omega)$？

参 考 文 献

[1] 张石生，不动点理论的新发展（Ⅰ），数学研究与评论，No. 3 (1982)，127—135；No. 2 (1983)，123—130.

[2] 张石生，不动点理论的新发展（Ⅱ），数学研究与评论，No. 4 (1983)，97—102；No. 2 (1984)，145—150.

[3] 张石生，陈绍仲．应用数学学报，1981年.

[4] 张石生，数学年刊，4A(2)，(1983)，159—164.

[5] Shih-sen Chang, *Nonlinear Analysis* V. 5, No2(1981), 113-122.

[6] 张石生，四川大学学报，1980年，第3期，9—16.

[7] 张石生，自然杂志，1981年，第6期，476—477.

[8] 张石生，四川大学学报，1980年，第4期，61—68.

[9] 张石生，关于可交换的随机算子的不动点定理，应用数学和力学，No. 3(1982)，345—354.

[10] 王梓坤，数学进展，第五卷，No.1 (1962)，45—71.

[11] 刘作述，四川大学学报，1979年，第2期，47—63.

[12] Špaček, A., *Czech. Math. J.* 5, 462-466(1955).

[13] Hanš, O., Random fixed point theorems, in Trans. of the first Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes(1957), 105-125.

[14] Hanš. O., *Czech. Math.* J. 7(1957), 154-158.

[15] Hanš, O., Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Math. statistics and probalility V. 2,part Ⅰ 185—205(1961).

[16] Bharucha, A. T.—Reid, Random integral equations, 1972.

[17] Bharucha, A. T. -Reid, *Bull. Amer. Soc.* V. 83, No. 5 (1976), 641—657.

[18] Itoh, S., *Pacific J. Math.* 68, 85—90(1977).

[19] Itoh, S., *J. Math. Aanlysis, Appli.* 67(2), 261—273(1979).

[20] Kannan, R., Salehi, H., *J. Math. Anal. Appli*, 57, 234—256 (1977).

[21] Wasan, M. T., Stochastic approximation, 1969.

[22] Oza, K. G., Jury, E. I., SIAM J. Control 6 (1968), 244—257.

[23] Mukherjea, A., Random transformations on Banach spaces Ph. D. Dissertation, Wayne State Univ, Michigan, 1966.

[24] Mukherjea, A., Acad. C. R., Sci. Paris Sér A-B 263 (1966).

[25] Prakasa Rao, B. L. S., *J. Math. Physical Sci.* 7(1973), 245—260.

[26] Cheh-Chih Yen, *Math. Japonica*, 23 No. 1 (1978), 27-31.

[27] Petryshyn, W. V., *Bull. Amer. Math. Soc.* 81(1975), 223—312.

[28] Lee, A. C. H., Padgett, W. J., Nonlinear Analysis, V. 4, No.2 (1980).

[29] Lee, A. C. H. Padgett, W. J. Nonlinear. Analysis. V. 1, 175—185(1977).

[30] Ray, B. K. Rhoades, B. E. *Pacific J. Math.* v. 71, No.2 (1977), 517—520.

[31] Ciric, L. B., *Proc. Amer. Math. Soc.* 45(1974), 267—273.