第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

Anstee的两个定理的订正*

万宏辉
(华中工学院数学系)

本文的目的有二个，其一是给出反例说明Anstee的两个定理[1,2]是欠妥的，其二是订正这二个定理。为方便起见，我们沿用[2]中的有关记号和定义。

设R和S分别为m维和n维非负整数向量，$P=(p_{ij})_{m\times n}$为每列至多有一个1的(0,1)-矩阵。令$\mathfrak{A}_P(R,S)$是一切以R为行和向量、S为列和向量且覆盖(cover) P的(0,1)-矩阵组成的集合。一个列向量α若是$\mathfrak{A}_P(R,S)$中某个矩阵的第k列，则称α为$\mathfrak{A}_P(R,S)$的一个可能第k列(possible k^{th} column)。定义A^*为这样一个$m\times n$的(0,1)-矩阵：它以R为行和向量，在覆盖P的前提下它各行中的1尽量向左靠拢。令t_i为A^*-P的第i行中非零元的列标中的最大者，若该行中没有1，就取$t_i=0$。当$t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant t_m$时，称$R$为$t$-单调的。设$A=(a_{ij})\in\mathfrak{A}_P(R,S)$，$a_{ik}=1$，但$p_{ik}=0$且$r_i<n$，则称$a_{ik}$为可动1(moveable 1)。给定两个列向量$\alpha$和$\beta$，设$\alpha$和$\beta$的第$i$个可动1分别在第$j$行和第$h$行，而$j\leqslant h$，则我们说$\alpha\leqslant\beta$。

Anstee在他的博士论文[1]中给出了下列定理(正式发表于[2]，见该文的定理5.1)。

定理Ⅰ 设α为这样一个m维(0,1)-向量：有s_k个1，α覆盖P的第k列，若$r_i=n$，则α的第i个元为1，其它的1都尽量向上靠。若R为t-单调的，S的分量为递减的1)，又$\mathfrak{A}_P(R,S)\neq\emptyset$，则$\alpha$是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的极小可能第$k$列(minimal possible k^{th} column)。

这一定理是不正确的。事实上，按照定理Ⅰ所构造出来的α不一定是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的可能第k列。

反例1 $R=(2,2,1)$，$S=(2,2,1)$，$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。显然，$\mathfrak{A}_P(R,S)$中仅有矩阵$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，满足定理Ⅰ的条件，由这定理推得$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$应是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的极小可能第1列，这是错误的。[2]中关于定理Ⅰ的证明的错误出在(5.2)式，该式在一般情况下是不成立的，反例1便是一例证。即使在某些特殊情形定理Ⅰ为真，但[2]中的证明仍是无效的。

反例2 $R=(1,2)$，$S=(1,1,1)$，$P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$。取$\mathfrak{A}_P(R,S)$的可能第1列为$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，不难知道$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$是极小可能第1列，但这时[2]中的(5.2)式是不满足的。

当$n=k$时，[2]中的(5.2)式是成立的，故可对定理Ⅰ订正如下：

定理1 设α为这样一个m维列向量：它有s_n个1、$m-s_n$个0，它覆盖P的第n列，若$r_i=n$，则α的第i个元为1，其它的1都尽量向上排。若R为t-单调的，S的分量为递减的，又$\mathfrak{A}_P(R,S)\neq\emptyset$，则$\alpha$是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的极小可能第$k$列。

令
$$d_j=\min\left\{\sum_{i=1}^{t}s_i^*-\sum_{i=1}^{t}s_i'\,\middle|\,j\leqslant t\leqslant n-1\right\}^{2)},\quad s_i'=\begin{cases}s_i, & i<k,\\ s_{i+1}, & i\geqslant k.\end{cases}$$

* 1983年12月16日收到。

1) 在[2]中，这一条件漏掉了。 2) 在[2]中"$n-1$"误为n"。

定义这样一个有s_k个1的m维(0,1)-向量ω，它覆盖P的第k列；$r_i=n$，则它的第i个元为1；余下的1根据下列条件尽可能向下靠：在满足$0<t_i\leqslant j$[3]的那些行i中1的个数$\leqslant d_j-\delta$，这里当$j\geqslant k$且P的第k列有1时，$\delta=1$，否则$\delta=0$。[2]中第5节所得的另一结果为(该文定理5.2)：

定理Ⅱ 设ω是如上所定义的，若这样的ω存在，则ω是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的极大可能第k列(maximal possible k^{th} column)；若不存在，则$\mathfrak{A}_P(R,S)=\varnothing$。

这一定理也是不对的。

反例3 $R=(2,1,1)$，$S=(2,2,0)$，$P=0$。这时，$\mathfrak{A}_P(R,S)$由二个元组成，即：$A'=(a'_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$和$A''=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。由定理Ⅱ，我们构造出极大可能第1列：$\omega=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。这显然是不可能的。

[2]中还就定理Ⅱ指出：设β是个有s_k个1的m维(0,1)-列向量，它覆盖P的第k列且在满足$r_i=n$的行i中有1，若$\beta\leqslant\omega$，则β是可能第k列。我们仍看[反例1]，显然极大可能第1列为：$\omega=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，且$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\leqslant\omega$，但$\alpha$不是可能第1列。由此可见，上述论断是错误的。

推敲[2]中关于定理Ⅱ的证明，可察觉“We note that $\bar{A}$ can be obtained from A^* by deleting 1′s.”一语和(5.4)式均为欠妥。

反例4 $R=(2,2,1)$，$S=(2,2,1)$，$P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。取$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，这是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的可能第1列，但$\bar{s}''_1=2$，$s^*_1-c_1-c=1$，即[2]中(5.4)式不满足。根据定理Ⅱ可构造出极大可能第一列：$\omega=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，然而$\omega\leqslant\beta$，由此亦见定理Ⅱ不对。

定理Ⅰ、Ⅱ及其证明出现错误的原因除了上面所指出的，还有就是忽视了$\mathfrak{A}_P(R,S)$的恒1(invariant 1)[4]和恒0(invariant 0)，例如[反例1]中A的元素a_{11}和a_{21}就分别为恒0和恒1，[反例3]中A'的元素a_{11}为恒1。显然，$\mathfrak{A}_P(R,S)$的恒1位置上必须有1，而恒0位置上务必不能摆上1。

不难验证当$k=n$时，[2]中关于定理Ⅱ的证明是正确的。于是，我们有

定理2 设$k=n$，ω如前所述，若这样的ω存在，则ω是$\mathfrak{A}_P(R,S)$的极大可能第n列；若不存在，则$\mathfrak{A}_P(R,S)=\varnothing$。

3) “$t_i>0$”在[2]中遗漏了。

4) 若对任一矩阵$A=(a_{ij})\in\mathfrak{A}_P(R,S)$，均有$a_{ef}=1$(或0)且$p_{ef}=0$，则称$a_{ef}$为$\mathfrak{A}_P(R,S)$的恒1(或恒0)。见[3]。

参 考 文 献

[1] Anstee, R. P., Ph. D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, CA. (1980).

[2] Anstee, R. P., Properties of a class of (0,1)-matrices covering a given matrix, *Can. J. Math.*, Vol. 34, No. 2, (1982), 438—453.

[3] 万宏辉，覆盖矩阵P的(0,1)-矩阵类$\mathfrak{A}_P(R,S)$的结构(Ⅰ)，中国组合数学首届学术会议论文，(1983).

A Correction to Two Theorems Due to Anstee

Wan Honghui

(Huazhong University of Science and Technology)

In this paper we have constructed some counter examples, showing that Theorem 5.1 and Theorem 5.2 in [2] are incorrect. The fact is that formulas (5.2) and (5.4) in [2] are incorrect, and moreover, the invariant 1′s and invariant 0′s in $\mathfrak{A}_P(R,S)$ are ignored. We have made a corretion to the two theorems, i. e. Theorem 5.1 and Theorem 5.2 in [2] are correct whenever $k=n$.