关于 Sperner 性质一个猜想的注记*

朱迎宪

（大连工学院）

设 P 是有限偏序集，f 是 P 上的秩函数。P_m 表示 P 中秩为 m 的元素集合。若 $\max\limits_m|P_m|=\max\{|A|: A$ 是 P 中的反链$\}$，则称 P 有 Sperner 性质。设 $a_1,\cdots,a_k\in P$，记 $F=\bigcup\limits_{j=1}^{k}\{b: a_j\leqslant b,\ b\in P\}$，称 F 是由 $a_1,\cdots,a_k$ 生成的序滤子。本文我们考虑的偏序集是布尔代数 B^n，秩函数 $f(x)=|x|$。K. W. LIH 提出了下面猜想

猜想 若 F 是由 B^n 中某些具有相同秩 t 的元素生成的序滤子，则 F 有 Sperner 性质。

$t=1$，猜想成立。但对任一 t 上述猜想一般不成立。例如 $t=4$，$n=7$，F 是 B^7 中秩为 4 的所有含 x_1 的子集和任一不含 x_1 的子集生成的序滤子，A 是 F_4 中所有含 x_1 的子集和 F_6 中所有不含 x_1 的子集组成。显然 A 是 F 的反链，$|A|>\max\limits_{4\leqslant i\leqslant 7}|F_i|$，故 F 没有 Sperner 性质。进一步，我们有

定理 设 $n\geqslant 7$，$\frac{n}{2}<t<n-2$，则存在 B^n 的一个序滤子 F，使得 F 没有 Sperner 性质。

证明 设 F 是 B^n 中秩为 t 的所有含 x_1 的元素和任一不含 x_1 的元素生成的序滤子，则 $|F_i|=\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-t-1}{i-t}\ (i=t,\cdots,n)$。下面我们证 $|F_i|$ 单调减，即证明

$$\binom{n-1}{i}+\binom{n-t-1}{i+1-t}<\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-t-1}{i-t}\qquad (t\leqslant i\leqslant n-1).$$

在 n 上用归纳法。$n=7$，结论显然成立。因为 $\binom{n-1}{i}=\binom{n-2}{i}+\binom{n-2}{i-1}$，$\binom{n-t-1}{i+1-t}=\binom{n-t-2}{i+1-t}+\binom{n-t-2}{i-t}$，当 $i=n-1$ 时，$\binom{n-2}{i}+\binom{n-t-2}{i+1-t}=0<1=\binom{n-2}{i-1}+\binom{n-t-2}{i-t}$，所以由归纳假设

$$\binom{n-1}{i}+\binom{n-t-1}{i+1-t}<\binom{n-2}{i-1}+\binom{n-2}{i-2}+\binom{n-t-2}{i-t}+\binom{n-t-2}{i-t-1}=\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-t-1}{i-t}.$$

现在设 A 是由 F_t 中所有含 x_1 的元素和 F_{t+1} 中所有不含 x_1 的元素组成，则 A 是 F 的一个反链，且 $|A|>|F_t|>\cdots>|F_n|$。定理得证。

参 考 文 献

LIH, K. W., Sperner Families over a Subset, *J. Combin. Theory, Ser.* A 29(1980)182—185.

*1984年4月6日收到.