第5卷 第1期
1985年1月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.1
Jan. 1985

关于半拓扑空间*

恽自求

（苏州大学数学系）

一 导 言

文[2]、[3]引入了半拓扑空间的概念，本文继续[2]、[3]讨论半拓扑空间的性质。本文的主要目的，在于统一处理H-闭空间、近似紧空间、S-闭空间与U-闭空间。文[5]—[10]的一些结果，可以作为本文定理的特例得出，其中部分结果得到了改进。另外，本文还给出有关上述空间的一些新结果。本文未加定义而直接使用的概念与术语的意义，可参考文[1]—[3]。

二 邻域紧子集与其等价刻划

定义 2.1 设$(X,\mathscr{V})$为邻域空间，$A\subseteq X$，$\mathscr{U}$为X中复盖A的集族，若对每个$a\in A$，存在$V\in\mathscr{V}(a)$及$U\in\mathscr{U}$，使$V\subseteq U$，则称$\mathscr{U}$为A的相对于X的邻域复盖(简称邻域复盖)，若从A的每个邻域复盖中可选出有限个元复盖A，则称A为X的邻域紧子集。

容易证明，邻域空间X是邻域紧空间当且仅当X是自身的邻域紧子集。

由定义2.1与下面的定理2.1容易看出，对邻域空间$(X,\mathscr{T})$、$(X,\mathscr{T}^{-})$、$(X,\mathscr{T}^{-0})$、$(X,\mathscr{T}^{-*-})$与$(X,\mathscr{T}_s)$，邻域紧子集分别等价于拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中的紧子集、相对于X的拟H-闭集(简记为QHC集)[4]、近似紧子集、相对于X的拟U-闭集(简记为QUC集)[5]与S-集[6]。

定理 2.1 设X为邻域空间，$A\subseteq X$，则下列各条等价：

(1) A是X的邻域紧子集。

(2) 设$\mathscr{F}$为X中集族，且$\{F\cap A\mid F\in\mathscr{F}\}$为中心集族，则$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}(F^{(-)}\cap A)\neq\varnothing$。

(3) 对A中任一渗透$\mathscr{F}$，有$A\cap ad\mathscr{F}\neq\varnothing$。

(4) 对A中任一极大渗透$\mathscr{F}$，有$A\cap\lim\mathscr{F}\neq\varnothing$。

(5) 对A中任一网(x_d,D)，有$A\cap ad(x_d,D)\neq\varnothing$。

(6) 对A中任一极大网(x_d,D)，有$A\cap\lim(x_d,D)\neq\varnothing$。

若X为O-ST空间，上面各条与下面的(7)也等价：

*1984年1月20日收到。

(7) 设$\mathscr{F}$为X中闭集族，且$\{F\cap A\mid F\in\mathscr{F}\}$为中心集族，则$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}(F\cap A)\neq\varnothing$,

证 (1)⇒(2)：用反证法．若$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}(F^{(-)}\cap A)=\varnothing$，则令$U_F=X-F$，$F\in\mathscr{F}$．设$a\in A$，因$(\bigcap_{F\in\mathscr{F}}F^{(-)})\cap A=\varnothing$，故存在$F\in\mathscr{F}$，使$a\notin F^{(-)}$，由$F^{(-)}$定义，即存在$V\in\mathscr{V}(a)$，使$V\cap F=\varnothing$，即$V\subseteq U_F$，因此，$\{U_F\mid F\in\mathscr{F}\}$为$A$的邻域复盖．又因为$A$是$X$的邻域紧子集，故存在$F_1,\cdots,F_n\in\mathscr{F}$，使$\bigcup_{i=1}^{n}U_{F_i}\supseteq A$，因此

$$\bigcap_{i=1}^{n}(F_i\cap A)=\bigcap_{i=1}^{n}(X-U_{F_i})\cap A=(X-\bigcup_{i=1}^{n}U_{F_i})\cap A\subseteq(X-A)\cap A=\varnothing,$$

这与$\{F\cap A\mid F\in\mathscr{F}\}$是中心集族矛盾．

(2) ⇒(3)：由[2]定理1.24(1)立得．(3)⟺(4)，(5)⟺(6)由[2]定理1.20(4)立得．(3)⟺(5)：由[2]定理1.22，1.23立得．

(3)⇒(1)：反证．若A不是邻域紧子集，则存在A的相对于X的邻域复盖$\mathscr{U}=\{U_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$，$\mathscr{U}$没有有限子族能复盖$A$，令

$$\mathscr{F}=\{F\subseteq A\mid F\supseteq(X-\bigcup_{i=1}^{n}U_{\gamma_i})\cap A,\ \gamma_1,\cdots,\gamma_n\in\Gamma,\quad n=1,2,\cdots\}$$

则$\mathscr{F}$为A中的渗透，下证$A\cap\operatorname{ad}\mathscr{F}=\varnothing$．

设$a\in A$，则存在$V\in\mathscr{V}(a)$及$U_{\gamma(a)}\in\mathscr{U}$，使$V\subseteq U_{\gamma(a)}$，令$F=(X-U_{\gamma(a)})\cap A$，则$F\in\mathscr{F}$且$V\cap F=\varnothing$，因此$a\notin\operatorname{ad}\mathscr{F}$，因$a$任意，因此$A\cap\operatorname{ad}\mathscr{F}=\varnothing$．

(2) ⇒(7)是显然的．

(7) ⇒(1)设$\mathscr{U}=\{U_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$为$A$的任一邻域复盖，因$X$是O-ST空间，故对每个$a\in A$，存在$a$的开邻域$V_a$及$U_{\gamma(a)}\in\mathscr{U}$，使$V_a\subseteq U_{\gamma(a)}$．令$F_a=X-V_a$，$a\in A$，则$F_a$为$X$中闭集，且$\bigcap_{a\in A}(F_a\cap A)=\bigcap_{a\in A}(X-V_a)\cap A=(X-\bigcup_{a\in A}V_a)\cap A=\varnothing$，由(7)，$\{F_a\cap A\mid a\in A\}$不是中心集族，即存在$a_1,\cdots,a_n\in A$，使$\bigcap_{i=1}^{n}(F_{a_i}\cap A)=\varnothing$，于是

$$\bigcup_{i=1}^{n}U_{\gamma(a_i)}\supseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{a_i}=\bigcup_{i=1}^{n}(X-F_{a_i})=X-\bigcap_{i=1}^{n}F_{a_i}\supseteq A,$$

因此A为邻域紧子集． ∎

对邻域空间$(X,\mathscr{T}^-)$，$(X,\mathscr{T}^{-0})$，$(X,\mathscr{T}^{-*-})$与$(X,\mathscr{T}_s)$，X的子集A的伪包$A^{(-)}$分别等价于A在拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中的θ-闭包$\mathrm{cl}_\theta A$[8]，δ-闭包$\mathrm{cl}_\delta A$[8]，u-闭包$\mathrm{cl}_u A$及θ-半闭包[7]（或S-闭包）$\mathrm{cl}_s A$，而上述邻域空间的闭子集分别等价于拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中的θ-闭子集[8]，δ-闭子集[8]，u-闭子集[5]与θ-半闭子集[7]，渗透（或网）的触点（或极限点）分别等价于拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中渗透（或网）的θ-触点（θ-极限点）[8]，δ-触点（δ-极限点）[8]，u-触点（u-极限点）[5]，S-触点（S-极限点）[6]，因此将定理2.1应用于上述邻域空间可得：

推论 设X是拓扑空间，$A\subseteq X$，则下列各条等价：

(1) A是X的QHC集（近似紧子集、QUC集、S-集）．

(2) 设$\mathscr{F}$为X中集族且$\{F\cap A|F\in\mathscr{F}\}$为中心集族，则$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}(cl_\theta F\cap A)\neq\varnothing$($\bigcap_{F\in\mathscr{F}}cl_\delta F\cap A\neq\varnothing$，$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}cl_u F\cap A\neq\varnothing$，$\bigcap_{F\in\mathscr{F}}cl_s F\cap A\neq\varnothing$)。

(3) A中任何滲透在A中有θ-触点(δ-触点、u-触点、S-触点)。

(4) A中任何极大滲透在A中有θ-极限点(δ-极限点、u-极限点、S-极限点)。

(5) A中任何网在A中有θ-触点(δ-触点、u-触点、S-触点)。

(6) A中任何极大网在A中有θ-极限点(δ-极限点、u-极限点、S-极限点)。

上述推论包括了[5]中命题2的(a)、(d)、(e)、(g)与[6]中命题2.2的(1)—(3)条。

三　邻域紧空间与邻域紧子集

定理3.1　邻域紧的邻域空间的闭子集为邻域紧子集。

证　设X为邻域紧的邻域空间，A为X的闭子集，则$A=A^{(-)}$，设$\mathscr{U}$为A的相对于X的邻域复盖。对$x\in X-A$，取$V_x\in\mathscr{V}(x)$，使$V_x\cap A=\varnothing$，$\mathscr{U}\cup\{V_x|x\in X-A\}$为X的邻域复盖，从中可选出有限个元复盖X，于是$\mathscr{U}$中也可选出有限个集复盖$A$，因此$A$是X的邻域紧子集。∎

推论1　([8]定理2推论) $H(i)$空间的θ-闭子集是QHC集。

推论2　([5]命题3) $U(i)$空间的u-闭子集是QUC集。

推论3　近似紧空间(S-闭空间)的δ-闭(θ-半闭)子集是近似紧子集(S-集)。

定理3.2　设$(X,\mathscr{V})$为T_2型的δ-ST空间，$A\subseteq X$，若A为X的邻域紧子集，则A为X中闭集。

证　设$x\notin A$，对每个$y\in A$，因X是T_2型的，故存在$V_{xy}\in\mathscr{V}(x)$，$V_y\in\mathscr{V}(y)$，使$V_{xy}\cap V_y=\varnothing$，$\{V_y|y\in A\}$为$A$的相对于X的邻域复盖，于是存在$y_1,\cdots,y_n\in A$，使$\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}\supseteq A$，因X是$\delta$-$ST$空间，故存在$V_x\in\mathscr{V}(x)$，使$V_x\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}V_{xy_i}$，而$V_x\cap A\subseteq(\bigcap_{i=1}^{n}V_{x,y_i})\cap(\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i})\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(V_{x,y_i}\cap V_{y_i})=\varnothing$，因此$x\notin A^{(-)}$，于是$A^{(-)}=A$，由[2]定理1.7，即$A$为闭集。证毕。∎

Uryson拓扑空间、T_2拓扑空间、函数分离拓扑空间分别按$(X,\mathscr{T}^-)$，$(X,\mathscr{T}^{-0})$与$(X,\mathscr{T}^{-*-})$是T_2型的δ-ST空间，因此由定理3.2可得：

推论　Uryson空间(T_2空间、函数分离空间)的UHC集(近似紧子集、QUC集)是θ-闭(δ-闭、u-闭)子集。

下例说明，对非δ-ST的T_2型邻域空间，定理3.2一般不成立。

例3.1　设$X=\{a,b,c\}$，$\mathscr{V}(a)=\{\{a\},\{a,c\},X\}$，$\mathscr{V}(b)=\{\{b\},\{b,c\},X\}$，$\mathscr{V}(c)=\{\{a,c\},\{b,c\},X\}$，则X为非$\delta$-$ST$的$T_2$型$O$-$ST$空间，集$\{a,b\}$是X的邻域紧子集，但$\{a,b\}^{(-)}=\{a,b,c\}$，因而$\{a,b\}$非闭集。

定理3.3　设$(X,\mathscr{V})$为δ-ST的T_2型空间，$\{A_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$为X中一族邻域紧子集，则$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$也是邻域紧子集。

证 由定理3.2及[1]中定理1.7(2)，知$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$为闭集，利用$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\subseteq A_\gamma$及$A_\gamma$为邻域紧子集，仿定理3.1证法即可证$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$为邻域紧子集。▌

推论 Uryson空间(T_2空间、函数分离空间)中一族QHC集(近似紧子集、QUC集)之交是QHC集(近似紧子集、QUC集)。

定理3.4 设$(X,\mathscr{V})$为O-ST空间，则X是邻域紧空间当且仅当X的每个闭的真子集是邻域紧子集。

证 设X不是邻域紧空间，则存在X的邻域复盖$\mathscr{U}=\{U_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$没有有限子复盖。因$X$是$O$-$ST$型空间，对每个$x\in X$，存在开集$V_x\in\mathscr{V}(x)$，及$U_{\gamma(x)}\in\mathscr{U}$，使$V_x\subseteq U_{\gamma(x)}$，取$x_0\in X$，令$X_0=X-V_{x_0}$，则$X_0$是$X$的闭的真子集，并且它的一个邻域复盖$\{V_x|x\in X-\{x_0\}\}$没有有限子族可复盖$X_0$，因此$X_0$不是$X$的邻域紧子集。

相反方面的证明由定理3.1立得。▌

推论 拓扑空间X是S-闭(近似紧)空间当且仅当X的每个θ-半闭(δ-闭)的真子集是S-集(近似紧子集)。

下例说明，定理3.4对非O-ST型邻域空间未必成立。

例3.2 设X为自然数全体，对$n\in X$，令$\mathscr{V}(n)=\{V|\{n,n+1\}\subseteq V\}$，则$(X,\mathscr{V})$为非O-ST型的$\delta$-ST空间。$\{\{n,n+1\}|n\in X\}$为$X$的一个邻域复盖，它没有有限子复盖，因此$X$非邻域紧空间，但对任意$A\subseteq X$及每个$n+1\in A$，一定有$n\in A^{(-)}$，因此$X$的每个闭的真子集都是有限集，当然是邻域紧子集。

定理3.5 设$(X,\mathscr{V})$为O-ST空间，如果X的每个开子集是邻域紧子集，则X的每个子集都是邻域紧子集。

证 设A为X的任一子集，$\mathscr{U}=\{U_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$为$A$的任一邻域复盖，因$X$是$O$-$ST$空间，故对每个$x\in A$，存在开集$V_x\in\mathscr{V}(x)$，$U_{\gamma(x)}\in\mathscr{U}$，使$V_x\subseteq U_{\gamma(x)}$，令$V=\bigcup_{x\in A}V_x$，由[2]中定理1.7(2)，$V$是$X$的开子集且$\{V_x|x\in A\}$是$V$的一个邻域复盖，由假设，存在$x_1,\cdots,x_n\in A$，使$\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}=V$，因此，$\{U_{\gamma(x_i)}|i=1,\cdots,n\}$也复盖$A$，于是$A$是邻域紧子集。▌

推论 如果拓扑空间X中任意一族正则开(正则闭)集的併集是近似紧子集(S-集)，则X的每个子集是近似紧子集(S-集)。

对非O-ST的邻域空间，定理3.5也不成立。

例3.3 设$X=N\cup\{x\}$，其中N为自然数全体之集，$x\notin N$，对每个$n\in N$，定义$\mathscr{V}(n)=\{V|\{n,n+1,x\}\subseteq V\}$，而$\mathscr{V}(x)=\{X\}$，则$X$为邻域紧空间。设$A$为$X$的闭子集，若$A\neq\varnothing$，则由$\mathscr{V}(x)$及$A^{(-)}$的定义，可得$x\in A^{(-)}=A$，于是对任何$n\in N$及$V\in\mathscr{V}(n)$，有$V\cap A\supseteq\{x\}\neq\varnothing$，即$n\in A^{(-)}=A$，因此$X$的闭子集非$\varnothing$即$X$，因而$X$的开子集也仅$X$与$\varnothing$，它们都是邻域紧子集，但$X$的子集$N$却不是邻域紧子集，因为$\{\{n,n+1,x\}|n\in N\}$为$N$的一个邻域复盖，它没有有限子族可以复盖$N$。

四 邻域紧子集的象与逆象

定理4.1 设X与Y是邻域空间，f：$X\to Y$是连续映射，若A为X的邻域紧子集，

则 $f(A)$ 为 Y 的邻域紧子集。

证　可仿[3]中定理 3.16 的证明。

对拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_1)$ 与 $(Y,\mathscr{T}_2)$，邻域空间 $(X,\mathscr{T}_1^-)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2^-)$，$(X,\mathscr{T}_1^{-0})$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2^{-0})$，$(X,\mathscr{T}_{1s})$ 到 $(Y,\mathscr{T}_{2s})$ 间的连续映射分别为 $(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 间的 θ-连续映射[8]，δ-连续映射[11]，S-连续映射[1]，$(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2^-)$ 的连续映射是 $(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 的几乎连续映射 $(a\cdot c\cdot H)$[2]，$(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2^{-0})$ 的连续映射是 $(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 的几乎连续映射 $(a\cdot c\cdot S)$[2]，$(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_{2s})$ 的连续映射是 $(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 的 θ-S 连续映射，对上述映射运用定理 4.1，即得下列推论，在这些推论中 X 与 Y 都是拓扑空间。

推论 1　([9]定理 2.5)　设 $f:X\to Y$ 是 θ-连续映射，则 f 保持 QHC 集。

推论 2　设 $f:X\to Y$ 是 δ-连续映射，则 f 保持近似紧子集。

推论 3　设 $f:X\to Y$ 是 S-连续映射，则 f 保持 S-集。

推论 4　设 $f:X\to Y$ 是 $a\cdot c\cdot H$ 映射 ($a\cdot c\cdot S$ 映射、θ-S 连续映射)。A 为 X 的紧子集，则 $f(A)$ 为 Y 的QHC 集(近似紧子集、S-集)。

其中推论 3 改进[6]中命题 3.7：

"若 $f:X\to Y$ 是连续的不定映射，则 f 保持 S-集。"

定理 4.2　设 $(X,\mathscr{V}_1)$ 为 O-ST 空间，$(Y,\mathscr{V}_2)$ 为邻域空间，$f:X\to Y$ 是映射，若 f 将 X 中闭集映成 Y 中闭集且对每个 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的邻域紧子集，则 Y 中邻域紧子集 A 的逆象 $f^{-1}(A)$ 为 X 的邻域紧子集。

证　设 $\mathscr{F}$ 为 X 中闭集族，且 $\{F\cap f^{-1}(A)\mid F\in\mathscr{F}\}$ 为中心集族。不失一般性，可设 $\mathscr{F}$ 中元素的有限交仍是 $\mathscr{F}$ 中的元素。设 $\mathscr{F}'$ 为 $\mathscr{F}$ 的有限子族，则

$\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}'}(f(F)\cap A)=\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}'}f(F\cap f^{-1}(A))\supseteq f(\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}'}(F\cap f^{-1}(A))\neq\varnothing$，因此 $\{f(F)\cap A\mid F\in\mathscr{F}\}$ 为中心集族，因 A 为 Y 中邻域紧子集，由定理 2.1，$\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}}(f(F)^{(-)}\cap A)\neq\varnothing$，但由假设，$f(F)$ 为 Y 中闭集，即 $f(F)=f(F)^{(-)}$，$F\in\mathscr{F}$。于是 $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}}(f(F)\cap A)\neq\varnothing$，取 $y\in\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}}(f(F)\cap A)$，则 $F\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$ 对每个 $F\in\mathscr{F}$ 都成立，因 $\mathscr{F}$ 中元素的有限交仍是 $\mathscr{F}$ 中元素，因而 $\{F\cap f^{-1}(y)\mid F\in\mathscr{F}\}$ 为中心集族，但 $f^{-1}(y)$ 是 X 的邻域紧子集，由定理2.1，$\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}}(F\cap f^{-1}(y))\neq\varnothing$，但 $y\in A$，因此 $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}}(F\cap f^{-1}(A))\neq\varnothing$，由定理 3.1，$f^{-1}(A)$ 为 X 的邻域紧子集。 ▮

由于拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_1)$ 到 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 的 S-完备映射[6]是 $(X,\mathscr{T}_{1s})$ 到 $(Y,\mathscr{T}_{2s})$ 的满足定理 4.2 条件的映射，于是得

推论 1　([6]命题 3.3)　设 X，Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是 S-完备映射，A 为 Y 中 S-集，则 $f^{-1}(A)$ 为 X 中 S-集。

考虑相应的邻域空间，可得下列推论，推论中 X 与 Y 都是拓扑空间。

推论 2　设 $f:X\to Y$ 将 X 中的 δ-闭集映成 Y 中的闭子集(δ-闭集、θ-闭集、u-闭集、θ-半闭集)，且任一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 中的近似紧子集，则 Y 中任一紧子集(近似紧子集、QHC集、QUC集、S-集)的逆象是 X 的近似紧子集。

推论 3　设 $f:X\to Y$ 将 X 中的闭集映成 Y 中的 θ-闭集(δ-闭集、u-闭集、θ-闭集)，且对

任一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的紧子集，则Y中任一QHC集(近似紧子集、QUC集、S-集)的逆象是X中的紧子集。

推论4 设$f:X\to Y$将X中的θ-半闭集映成Y中的闭子集(θ-闭集、δ-闭集、u-闭集)，且对任一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X中的S-集，则Y中任一紧子集(QHC集、近似紧子集、QUC集)在X中的逆象是X中S-集。

定理4.2条件中的"X是O-ST空间"不能减弱为"X是邻域空间。"

例4.1 设$(X,\mathscr{V}_1)$为例3.2中定义的空间，$(Y,\mathscr{V}_2)$为在自然数集上定义的有限余拓扑空间，定义$f:X\to Y$为X到Y上的恒等映射。因X中每个闭的真子集都是有限集，因此f将X中闭集映成Y中闭集，且对任何$n\in Y$，$f^{-1}(n)=\{n\}$为X的单点集，自然是邻域紧子集。但紧拓扑空间Y是自身的邻域紧子集，而这时$f^{-1}(Y)=X$由例3.2知非邻域紧空间，因而非自身的邻域紧子集。

五 其它性质

定理5.1 设$(X,\mathscr{V}_1)$为邻域空间，$(X,\mathscr{V}_2)$为δ-ST空间且$\mathscr{V}_1$由$(X,\mathscr{V}_2)$中的某些闭集所构成，又设A为$(X,\mathscr{V}_1)$中邻域紧子集，$A\subseteq B\subseteq A^{(-)}$，其中$A^{(-)}$为$A$在$(X,\mathscr{V}_2)$中的伪包，则$B$也是$(X,\mathscr{V}_1)$的邻域紧子集。

证 设$\mathscr{U}$为B的相对于$(X,\mathscr{V}_1)$的邻域复盖。对$a\in A$，取$V_a\in\mathscr{V}_1(a)$及$U_a\in\mathscr{U}$，使$V_a\subseteq U_a$，则$\{V_a|a\in A\}$是A的相对于$(X,\mathscr{V}_1)$的邻域复盖，由假设，存在$a_1,\cdots,a_n\in A$，使$\bigcup_{i=1}^{n}V_{a_i}\supseteq A$，但$V_{a_i}$为$\delta$-$ST$空间$(X,\mathscr{V}_2)$的闭集，由[2]中定理1.9(1)，$\bigcup_{i=1}^{n}V_{a_i}$也是$(X,\mathscr{V}_2)$中的闭集，因而

$$\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}\supseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{a_i}=\left(\bigcup_{i=1}^{n}V_{a_i}\right)^{(-)}\supseteq A^{(-)}\supseteq B.$$

其中伪包都是在$(X,\mathscr{V}_2)$中的，故B也是$(X,\mathscr{V}_1)$的邻域紧子集。 ∎

由于$(X,\mathscr{T}^{-})$，$(X,\mathscr{T}^{-*-})$，$(X,\mathscr{T}_s)$中的邻域都是正则闭集，也是$(X,\mathscr{T}^{-0})$中的闭集，由此得

推论 设A为拓扑空间X的QHC集(QUC集，S-集)，$A\subseteq B\subseteq \mathrm{cl}_\delta A$，则$B$也是$X$的QHC集(QUC集，$S$-集)。

由于在拓扑空间中，$\mathrm{cl}_\delta A\supseteq \mathrm{cl}A$总成立，因此上述推论关于QUC的部分改进了[5]中命题3：

"设A为扑拓空间X的QUC集，则$\mathrm{cl}A$也是X的QUC集。"

定理5.2 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$(X,\mathscr{V})$为邻域紧邻域空间，若$(X,\mathscr{V})$中的邻域补集是$(X,\mathscr{T})$中开集，则$(X,\mathscr{V})$中具有不相交伪包的两个集可用$(X,\mathscr{T})$中的开集来分离。

定理5.2可由下面的引理立刻推出：

引理 设$(X,\mathscr{V})$是邻域紧邻域空间，$A,B\subseteq X$且$A^{(-)}\cap B^{(-)}=\varnothing$，则存在$C,D\subseteq X$，使$C\supseteq A$，$D\supseteq B$，$C\cap D=\varnothing$，且$C$，$D$都是$(X,\mathscr{V})$中有限个邻域补集的交集。

证　设 $\mathscr{A}=\{C\subseteq X\mid C\supseteq A$ 且 C 为 $(X,\mathscr{V})$ 中邻域补集$\}$,

$\mathscr{B}=\{D\subseteq X\mid D\supseteq B$ 且 D 为 $(X,\mathscr{V})$ 中邻域补集$\}$.

先证 $A^{(-)}=\bigcap\limits_{C\in\mathscr{A}}C^{(-)}$, $B^{(-)}=\bigcap\limits_{D\in\mathscr{B}}D^{(-)}$.

显然 $A^{(-)}\subseteq\bigcap\limits_{C\in\mathscr{A}}C^{(-)}$. 反之，若 $x\notin A^{(-)}$，则存在 $V_x\in\mathscr{V}(x)$，使 $V_x\cap A=\varnothing$，令 $C_x=X-V_x$，则 $C_x\in\mathscr{A}$ 且 $x\notin C_x^{(-)}$，故 $x\notin\bigcap\limits_{C\in\mathscr{A}}C^{(-)}$，于是 $A^{(-)}\supseteq\bigcap\limits_{C\in\mathscr{A}}C^{(-)}$，因此 $A^{(-)}=\bigcap\limits_{C\in\mathscr{A}}C^{(-)}$.

同理得 $B^{(-)}=\bigcap\limits_{D\in\mathscr{B}}D^{(-)}$.

现假定引理结论不成立，则 $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ 为 X 中中心集族，因 $(X,\mathscr{V})$ 是邻域紧空间，由〔2〕中定理 2.3,

$$A^{(-)}\cap B^{(-)}=\Big(\bigcap_{C\in\mathscr{A}}C^{(-)}\Big)\cap\Big(\bigcap_{D\in\mathscr{B}}D^{(-)}\Big)=\bigcap_{E\in\mathscr{A}\cup\mathscr{B}}E^{(-)}\neq\varnothing$$

与假设矛盾。 ∎

推论 1　(〔10〕定理 1) $H(i)$ 空间中两个具有不相交 θ-闭包的集可用开集来分离。

推论 2　(〔5〕定理6) $U(i)$ 空间中两个具有不相交 u-闭包的子集可用开集来分离。

推论 3　S-闭空间中两个具有不相交 θ-半闭包的集可用开集来分离。

参 考 文 献

[1] 王国俊，S-闭空间的性质，数学学报，24(1981)，55—63.

[2] ______，半拓扑空间(1)，陕西师大学报，1977，34—54.

[3] ______，半拓扑空间(2)，陕西师大学报，1978，10—34.

[4] Porter J. and Thomas, J., On H-closed and minimal Hausdorff spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138 (1969), 159—170.

[5] Espelie, M. S., Joseph, J. E. and Kwack, M. H., Applications of the U-closure operator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(1981), 167—174.

[6] Dickman, Jr. R. F. and Krystock, R., L., S-sets and S-perfect mappings, *ibid*, 80 (1980), 687—692.

[7] Joseph, J. E. and Kwack, M. H., On S-closed spaces, *ibid*, 80 (1980), 341—348.

[8] Величко, Н. Б., Н-замкнутые тололегические пространства, Матем. сб., 70 (112)(1966), 98—112.

[9] Dickman, R. F. and Porter, J. R., θ-closed subsets of Hausdorff spaces, *Pacific J. Math.*, 59(1975), 407—415.

[10] Espelie M. S. and Joseph, J. E., Some properties of θ-closure, *Can. J. Math.*, 33 (1981), 142—149.

[11] Noiri, T., On δ-continuous functions, *J. Korean. Math. Soc.*, 16 (1980), 161—166.