关于拓广的 Hadamard 不等式的一点注记*

党诵诗

（郑州测绘学院）

对于连续凸函数 $f(x)$，在[1]中，建立了拓广的 **Hadamard** 不等式，本文给出一个简洁的证明，并且，从中可以看出这个拓广是十分自然的。

设 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)=t\in\Omega$. 给定 $p_i(t)\,(\geqslant 0)$ 以及与 t 无关的 x_i，$\sum_{i=0}^{n}p_i(t)=1$. 由以上假设，并注意到 $\int_{\Omega}|\Omega|^{-1}dt=1$，分别应用 **Jensen** 不等式两次，即有

$$f\left(\int_{\Omega}\Sigma x_ip_i(t))|\Omega|^{-1}dt\right)\leqslant\int_{\Omega}f(\Sigma x_ip_i(t))|\Omega|^{-1}dt\leqslant\int_{\Omega}(\Sigma f(x_i)p_i(t))|\Omega|^{-1}dt. \tag{1}$$

记 $\bar{p}_i=\int_{\Omega}p_i(t)|\Omega|^{-1}dt$，则上面二不等式可写为

$$f(\Sigma x_i\bar{p}_i)\leqslant|\Omega|^{-1}\int_{\Omega}f(\Sigma x_ip_i(t))dt\leqslant\Sigma f(x_i)\bar{p}_i\ . \tag{2}$$

由于 $\sum_{i=0}^{n}\bar{p}_i=1$，所以从(2)式两端看出，取等号的情形限于诸 x_i 相等，或 $f(x)$ 为线性函数。

根据对 $p_i(t)$ 的假定，从单位球面上点的球坐标平方的表示，我们知道 $\sum_{i=0}^{n}\cos^2\theta_{i+1}\cdot\prod_{k=1}^{i}\sin^2\theta_k=1$，因此，令 $t_i=\sin^2\theta_i$，自然地取 $p_i(t)=(1-t_{i+1})\prod_{k=1}^{i}t_k$，$0\leqslant t_i\leqslant 1$. 这时，如果取 $\Omega=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times\cdots\times[\alpha_n,\beta_n]$，则经过简单计算，可得 $\bar{p}_i=p_i(\bar{t})$，其中，$\bar{t}=\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2},\ \frac{\alpha_2+\beta_2}{2},\cdots,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)$. 于是，(2)式成为

$$f(\Sigma x_ip_i(\bar{t}))\leqslant|\Omega|^{-1}\int_{\Omega}f(\Sigma x_ip_i(t))dt\leqslant\Sigma f(x_i)p_i(\bar{t}). \tag{3}$$

这就是所证不等式。从上述证明过程可以看出，这个不等式有明显的几何意义。

参考文献

[1] 王中烈、王兴华, On an extension of Hadamard inequalities for convex functions, 数学年刊, 3,5 (1982), p. 567—570.

[2] Hardy G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge University Press (1952).

*1984 年 1 月 42 日收到。